INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

Márcia Maria Fusaro Pinto
Grey Ercole

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

Belo Horizonte
Editora UFMG
2009

Os Cursos de Graduação da UFMG, modalidade a distância, foram concebidos tendo em vista dois princípios fundamentais. O primeiro se refere à democratização do acesso à educação superior; o segundo consiste na formação de profissionais de alto nível, comprometidos com o desenvolvimento do país.

A coletânea da qual este volume faz parte visa dar suporte aos estudantes desses cursos. Cada volume está relacionado com um tema, eleito como estruturante na matriz curricular. Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva se limitar somente ao estudo do volume. Ao contrário, ele é o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Nessa direção, cada volume apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

Cada volume da coletânea está dividido em aulas, que consistem em unidades de estudo do tema tratado. Os objetivos, apresentados em cada início de aula, indicam as competências e habilidades que o estudante deve adquirir ao término de seu estudo. As aulas podem se constituir em apresentação, reflexões e indagações teóricas, em experimentos ou em orientações para atividades a serem realizadas pelos estudantes.

Para cada aula ou conjunto de aulas, foi elaborada uma lista de exercícios com o objetivo de levar o estudante a avaliar o seu progresso e a desenvolver estratégias de metacognição ao se conscientizar dos diversos aspectos envolvidos em seus processos cognitivos. Essa lista auxiliará o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, o aluno deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos tutores, professores especialistas e colegas.

Agradecemos a todas as instituições que colaboraram na produção desta coletânea. Em particular, agradecemos às pessoas (autores, coordenador da produção gráfica, coordenadores de redação, desenhistas, diagramadores, revisores) que dedicaram seu tempo, e esforço na preparação desta obra que, temos certeza, em muito contribuirá para a educação brasileira.

Maria do Carmo Vila
Coordenadora do Centro de Apoio à Educação a Distância
UFMG

Sumário

Apresentação

Este livro dá continuidade ao conteúdo apresentado em *Introdução ao Estudo das Funções*. No primeiro livro, estudamos funções reais de variáveis reais, relacionando-as a fenômenos que elas modelam. Iniciamos uma discussão sobre variação e taxas de variação de tais funções.

Aqui, vamos prosseguir o estudo das ideias e técnicas que compõem a área do conhecimento nomeada Cálculo Diferencial. Essa área dá sustentação teórica ao estudo de funções do ponto de vista da Matemática, possibilitando aprofundar nosso entendimento sobre os fenômenos da realidade e, ainda, sobre a própria Matemática.

Escrevemos este livro especialmente para a disciplina de Cálculo do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) na modalidade a distância. Sabemos que existem vários outros materiais e livros que abordam esse conteúdo, inclusive para cursos a distância. No entanto, sentimos a necessidade de elaborar um material que estivesse em sintonia com o que acreditamos ser essencial para um curso que se pretende ser oferecido a distância e que auxiliasse para o crescimento do aluno do curso de Licenciatura em Matemática em sua escolha e atuação profissional futura, como professor de Matemática.

A nossa experiência se construiu como professores de cursos presenciais e a distância, e a partir da pesquisa no campo da Educação Matemática (em especial, no uso de tecnologias na Educação Matemática). Na Educação a Distância, atuamos como professores e tivemos ainda contato com outros profissionais que atuam há mais tempo na área. Retomamos a experiência anterior com a produção de materiais no Curso de Química a Distancia, buscando melhorá-la. Mantivemos a decisão que foi tomada naquele momento sobre o estilo e linguagem, formato do texto e ordem de apresentação das principais ideias do conteúdo que vamos estudar. Agradecemos, em especial, às autoras do texto *Cálculo I*, do curso de Licenciatura em Química, pela intensa participação em discussões das quais resultaram as linhas gerais para a construção deste texto.

Nossa opção é por não nos restringirmos à linguagem matemática formal, estando, contudo, atentos ao rigor nas definições matemáticas e construção dos argumentos ao justificar proposições e teoremas. Pelo fato de termos aberto mão do poder de síntese da linguagem matemática, nosso texto ficou longo. Mesmo assim, optamos por esse estilo porque acreditamos que a introdução precoce de uma linguagem puramente técnica pode resultar numa ênfase em manipulação simbólica, em detrimento das discussões conceituais que achamos importantes e que queremos proporcionar aos alunos.

Procuramos ainda desenvolver o texto a partir de exemplos, seguidos da sistematização dos resultados, num movimento de teorização a partir de experiências que esperamos ter proporcionado aos alunos. Buscamos, sempre que possível, representar as noções por meios visuais, propondo ao leitor explorar gráficos e figuras, como oportunidade para diversificar as representações dos conceitos. Apresentamos também exemplos de situações do nosso dia a dia e em outras ciências, modelando-os matematicamente para um dentre os possíveis entendimentos dos fenômenos ou proposição de soluções. Partindo desses exemplos e de diferentes representações, buscamos estabelecer relações e, assim, construir os conceitos matemáticos, enfatizando no texto o estudo destes últimos.

Em síntese, pensamos em elaborar este texto de modo a desvelar uma noção mais ampla de conhecimento matemático e atender aos leitores, que não terão um professor ao seu lado para "explicar a matéria". Temos a expectativa de que, estudando exemplos e diversas representações de um mesmo conceito, o aluno compreenda melhor do que se trata o conteúdo e familiarize-se com ele. Sem descuidar dos momentos de síntese teórica, buscamos estabelecer relações e generalizar situações, contribuindo para que o entendimento do aluno não fique restrito a experiências com inúmeros exemplos e técnicas algébricas que ele não consegue relacionar.

Esse movimento, a partir de experiências e de modelagem de fenômenos no sentido de uma maior teorização, é o fio condutor da estrutura deste livro. Nas duas aulas iniciais, retomamos as noções de taxa de variação média e instantânea já estudadas e definimos a noção de derivada. Os conceitos de limite e continuidade são explorados nas quatro aulas subsequentes, como instrumentos para estabelecermos as regras de derivação. Essas últimas são apresentadas em três aulas, que incluem a Regra da Cadeia, importante para a derivação de funções compostas. A seguir, ocupamo-nos com algumas aplicações do conceito de derivada, contemplando a ideia de linearização de funções em intervalos contendo pontos de seu domínio, traçado de gráficos de funções obtidas por meio das estudadas até então, problemas de otimização, e determinação de taxas de variação desconhecidas, a partir de suas relações com taxas conhecidas. Finalizamos o texto com o enunciado do Teorema do Valor Médio e duas consequências, já anunciando o tema do próximo livro, que é o estudo de Integrais.

Esperamos que, ao longo deste nosso encontro, discutindo os conceitos e aprendendo técnicas para resolução de problemas, surjam novas ideias e propostas para melhorar ainda mais o diálogo que este livro busca proporcionar.

Os autores

AULA 1

Taxa de variação instantânea, derivada e reta tangente a gráficos[1]

OBJETIVOS
Introduzir os conceitos de taxa de variação instantânea e de derivada. Interpretar geometricamente as noções introduzidas. Definir reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$.

1. INTRODUÇÃO

Nesta primeira aula, abordamos o conceito de taxa média de variação e estudamos uma proposta para definir as noções *de taxa de variação instantânea* e de *reta tangente* ao gráfico de uma função $y = f(x)$, $x \in IR$. Sistematizamos a discussão, definindo *derivada*. Essa última é um dos instrumentos matemáticos centrais na construção da teoria do cálculo.

Iniciamos com a discussão de um exemplo.

2. EXEMPLO: A VELOCIDADE INSTANTÂNEA

A noção de taxa média de variação já é nossa conhecida. Vamos retomá--la, a partir de um problema que já estudamos, em que calculamos a *velocidade média* de um objeto em movimento.[2]

Nosso objetivo ao revisitar o exemplo é o de iniciar a discussão sobre velocidade *em um instante*, estudando propostas para estimá-la.

2.1 Exemplo: velocidade média e taxa média de variação

Um objeto se move ao longo de uma linha reta de modo que sua posição em relação ao ponto de partida, após t minutos, é $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$.

[1] Esta aula se constrói a partir da apresentada no livro *Cálculo I*, para o curso de Licenciatura em Química a Distância, com o conhecimento e de acordo das autoras daquele texto.

[2] A velocidade média é apresentada no livro *Introdução ao estudo das funções* como caso clássico do conceito de taxa média de variação de *P* correspondente à variação de *t* em um dado intervalo [a, b]. Confira essa noção, retomando a Aula 2, e o exemplo 2.3 daquele texto.

A taxa média de variação de p é calculada dividindo a variação Δp da distância pela variação de tempo Δt .

Por exemplo, no intervalo de tempo de 3 a 5 *min*, a velocidade média, ou taxa média de variação, do objeto em movimento é igual a:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(5) - s(3)}{5-3} = \frac{21-9}{2} = \frac{12}{2} = 6,0 m / min.$$

Podemos propor esse valor da velocidade média como uma aproximação da velocidade do objeto no *instante* $t = 3$ *min*. Mas o que poderíamos fazer para buscar uma estimativa melhor?

Uma primeira ideia pode ser considerar intervalos de tempo menores, tendo 3 como seu extremo esquerdo, obtendo aproximações melhores para a *velocidade instantânea* do objeto no instante $3\,min$, a partir do cálculo das velocidades médias. É o que faremos a seguir.

2.2 Exemplo: estimando a velocidade instantânea

A proposta é, então, a de calcular as velocidades médias do objeto, ou as taxas médias de variação da função s , em intervalos de tempo cada vez menores:[3]

$$[3,4]; \; v_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(4)-s(3)}{4-3} = \frac{14-9}{4-3} = \frac{5}{1} \quad 5,0\, m/min;$$

$$[3,3.5]; \; v_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,5)-s(3)}{3,5-3} = \frac{11,25-9}{3,5-3} = \frac{2,25}{0,5} = 4,5\, m/min;$$

$$[3,3.25]; \; v_3 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,25)-s(3)}{3,25-3} = \frac{10,0625-9}{3,25-3} = \frac{1,0625}{0,25} = 4,25\, m/min;$$

$$[3,3.125]; \; v_4 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,125)-s(3)}{3,125-3} = \frac{9,515625-9}{3,125-3} = \frac{0,515625}{0,125} = 4,125\, m/min;$$

$$[3,3.01]; \; v_5 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,01)-s(3)}{3,01-3} = \frac{9,0401-9}{3,01-3} = \frac{0,0401}{0,01} = 4,01\, m/min;$$

$$[3,3.001]; \; v_6 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{s(3,001)-s(3)}{3,001-3} = \frac{9,004001-9}{3,001-3} = \frac{0,004001}{0,001} = 4,001\, m/min.$$

[3] Escolhemos, aleatoriamente, alguns valores para o extremo direito do intervalo, de tal forma que os tamanhos dos intervalos vão diminuindo.

Observe que usamos valores da velocidade média do objeto, em intervalos que continham o instante $t = 3\,min$, como aproximações para o valor da velocidade instantânea em $t = 3\,min$.

Na sequência de cálculos que desenvolvemos, os valores das taxas médias de variação parecem se aproximar, cada vez mais, de 4 *m/min*. Em outras palavras, à medida que os tamanhos dos intervalos vão se

aproximando de zero, os valores das velocidades médias, calculadas nesses intervalos, vão se estabilizando em torno de $4\ m/min$.

Essa sequência de cálculos corresponde a um processo denominado "cálculo de limite[4]", que será o tema da Aula 4.

Voltando ao nosso exemplo, podemos propor que a velocidade instantânea do objeto, no instante $t = 3$, vale $4\ m/min$. Na verdade, essa é a proposta aceita e adotada. Retomando o mesmo processo usado no exemplo, podemos definir a velocidade instantânea como a seguir:

2.3 Definição

A *velocidade instantânea* de um objeto no instante *t* é o limite das velocidades médias do objeto calculadas em intervalos de tempo cada vez menores, contendo *t*.

2.4 Exemplo: cálculo da velocidade instantânea

A *velocidade instantânea* do objeto no exemplo 2.2 foi calculada numericamente para $t = 3$. Vamos retomar esses cálculos usando notação já estudada, para generalizar o procedimento.

Assim, seja a expressão do movimento $p = s(t) = t^2 - 2t + 6$.

Ao longo do percurso do objeto, em um intervalo de $t = 3$ até um tempo posterior $t = 3 + h$, $h > 0$, vamos escrever a variação de p como $\Delta p = p(3+h) - p(3)$ e sua taxa média de variação como

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\left[(3+h)^2 - 2(3+h) + 6\right] - \left[3^2 - 2 \times 3 + 6\right]}{h}$$

Veja que expressamos o intervalo em que calculamos a taxa média de variação como $[3, 3+h]$.

Obtivemos assim uma "fórmula"; e não podemos utilizá-la no instante exato $t = 3$, porque isso corresponderia a fazer $h = 0$ em sua expressão. Isso nos induziria a uma divisão por zero, que não é permitida em nosso sistema numérico.[5]

No entanto, podemos estimar o que acontece para valores próximos de zero, uma vez que para $h \neq 0$ podemos escrever a igualdade:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h + 6 - 9}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Para cada valor de $h \neq 0$, a expressão acima $\frac{\Delta p}{\Delta t} = h + 4$ corresponde aos valores das velocidades médias calculadas em intervalos $[3, 3+h]$.

[4] Há uma definição, em termos matemáticos, do conceito de "limite". Por enquanto, vamos trabalhar com esse conceito de forma intuitiva, como no exemplo 2.2.

[5] Será que a situação será a mesma, sempre que discutirmos taxas instantâneas de variação?

Tomar os comprimentos dos intervalos se aproximando de zero corresponde a fazer h ficar muito pequeno; e, da análise da expressão à direita do sinal de igualdade, $h+4$, percebemos que os valores das velocidades médias vão se estabilizando em torno de $4m/min$ quando h se aproxima de zero.

Como já mencionado, esse processo recebe o nome de "limite", e diremos: o limite de $\frac{\Delta p}{\Delta t} = h + 4$ quando h se aproxima de 0 é 4.
As considerações que fizemos neste exemplo são idênticas para valores negativos de h.

3. TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Os procedimentos que desenvolvemos podem ser generalizados para qualquer função $y = f(x)$, e não apenas para a distância percorrida como função do tempo.

3.1 Definição

Sejam $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A *taxa de variação instantânea* de f em a é o limite das taxas médias de variação de f em intervalos cada vez menores contendo a.
A unidade de medida da taxa instantânea é

$$\frac{\textit{unidade de medida de } y}{\textit{unidade de medida de } x}.$$

Para uma função $y = f(x)$ com domínio D e $a \in D$, podemos trabalhar o conceito seguindo o mesmo roteiro do exemplo anterior:

- escrevemos $[a, a + \Delta x]$, com $\Delta x > 0$, para representar o comprimento dos intervalos contendo a em sua extremidade inferior;
- escrevemos as taxas médias de variação de y correspondente à variação de x no intervalo $[a, a + \Delta x]$, para $\Delta x > 0$, por meio da definição:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

A *taxa de variação instantânea* de f em a é definida como o valor em torno do qual a expressão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se estabiliza quando Δx fica muito pequeno. Ou seja, a taxa instantânea é o "limite" da expressão $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, quando Δx fica muito pequeno.

3.2 Exemplo: cálculo da taxa instantânea de $y = t^3$, em $t = 2$

De modo semelhante ao dos exemplos anteriores, escrevemos o intervalo contendo o ponto $t = 2$ como $[2, 2 + \Delta t]$. A expressão da taxa média de variação se escreve

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{(2+\Delta t)^3 - 2^3}{(2+\Delta t) - 2} = \frac{2^3 + 3.2^2\Delta t + 3.2.(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - 2^3}{\Delta t} = \frac{3.2^2.\Delta t + 3.2.(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3}{\Delta t}.$$

Assim, $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 12 + 6\Delta t + (\Delta t)^2$, que se estabiliza em 12 quando Δt fica muito pequeno. Em outras palavras, neste caso, o "limite" de $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ quando Δt fica próximo de zero é 12.

3.3 Observações sobre a notação e a linguagem

Veja que no primeiro exemplo escrevemos o intervalo na forma $[a, a+h]$. Adotamos $[a, a+\Delta x]$ e $[a, a+\Delta t]$ no desenvolvimento dos outros dois. Todos esses modos de representar o intervalo são válidos. Para o primeiro, vamos considerar h ficando próximo de zero; no segundo, Δx ficando próximo de zero e no terceiro Δt ficando próximo de zero. Importante é a ideia de que o tamanho do intervalo tende a zero; e, é claro, cuidar em manter a coerência com a escrita adotada.

A mesma discussão que está sendo feita para valores de $\Delta x > 0$ deve ser elaborada para valores de $\Delta x < 0$. Como ela é semelhante, não a discutiremos aqui. Razões por que elas são importantes e devem ser consideradas serão abordadas mais tarde.

4. A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A *taxa de variação instantânea* de uma função nos fornece informações a respeito da *variação instantânea* da função em um ponto. Por um lado, o valor *f(x)* nos dá um "retrato" da função no ponto *x*; por outro, a taxa de variação instantânea nos informa sobre a "tendência" da função, a partir de *f(x)*, como se fosse uma "velocidade" de sua variação. É possível saber, por exemplo, se a função está crescendo ou decrescendo nas proximidades daquele ponto e, mais que isso, a magnitude desse crescimento (ou decrescimento).

Por sua importância, este conceito recebe um nome especial.

4.1 Definição

Sejam $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A *derivada* da função f no ponto a é definida como sendo a taxa instantânea de variação de f em a.

4.2 Notação e linguagem

Sejam $y = f(x)$ uma função com domínio D e $a \in D$. A derivada de f no ponto a é denotada por $f\,'(a)$, e lemos "f linha de a".

4.3 Exemplo: calculando $f'(a)$

Para a função $y = x^2$, vamos calcular $f'(1)$. Para isso, escrevemos:

- o intervalo $[1,1+\Delta x]$, em que vamos considerar as taxas médias de variação da função;
- a expressão da taxa média de variação,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x \,;$$

- $f'(1) = 2$, porque $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x$ estabiliza em 2 quando Δx fica muito pequeno.

4.4 Exemplo: calculando a derivada de $y = 3x - 1$

Como calcular a derivada de $y = f(x) = 3x - 1$ no ponto $x = 4$?

Consideramos o intervalo $[4,4+\Delta x]$.

Escrevemos a expressão da taxa de variação média

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} = \frac{3(4+\Delta x) - 1 - (3.4 - 1)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

Veja que nesse caso as taxas médias são constantes! Ou seja, estão estabilizadas no valor 3 em todos os intervalos! Dizemos que o "limite" de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx fica pequeno é 3.

Assim, para $y = f(x) = 3x - 1$, temos $f'(4) = 3$.

Veja que o valor da derivada coincide com a inclinação angular da reta $y = 3x - 1$, que é $a = 3$. Esse fato não é uma coincidência, e vai ocorrer em todos os pontos do domínio da função $y = ax + b$. A interpretação geométrica a seguir será importante para entendermos essa questão.

5. INTERPRETANDO GEOMETRICAMENTE

Até aqui fizemos uma discussão primordialmente numérica e algébrica. É importante também representarmos essas ideias geometricamente, por nos mostrar outros aspectos relevantes do conceito que estamos estudando.

5.1 Interpretação geométrica da taxa média de variação

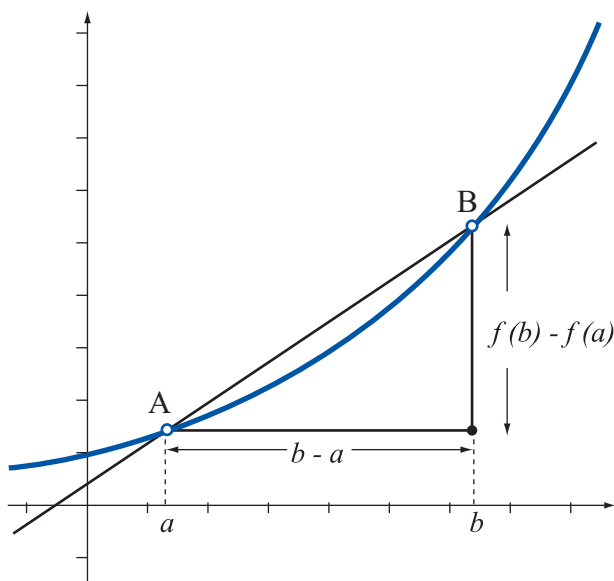



Figura 1 - Interpretação geométrica da taxa média de variação

A taxa média de variação de $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Veja na Figura 1 que o quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Concluímos:

> O valor da taxa média de variação de $y = f(x)$, quando x varia em $[a,b]$, é igual ao da inclinação da reta que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Podemos ainda escrever que:

> O valor da taxa média de variação de $y = f(x)$, quando x varia em $[a,b]$, é igual à inclinação da reta secante[6] que contém os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

[6] Uma reta que contém, pelo menos, dois pontos do gráfico de uma função é denominada *reta secante* ao gráfico da função.

5.2 Interpretação geométrica da derivada ou taxa instantânea de variação

Sejam $y = f(x)$ uma função e a um ponto de seu domínio. Já sabemos que:

1. a derivada de f em a é o limite das taxas médias de variação de f, em intervalos contendo a cujos comprimentos tendem a zero; e
2. a taxa média de variação de f é a inclinação de uma reta secante a seu gráfico, passando por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Veja na Figura 2 a representação das secantes por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, para valores de abscissas b do ponto B cada vez mais próximos de a.

Observe a sequência de retas secantes, que parece se estabilizar numa posição que indicamos por r. Sua inclinação, que corresponde à *taxa instantânea de variação*, foi definida como a derivada de $y = f(x)$ em $x = a$.

Definimos a reta r como a reta tangente ao gráfico de f em $x = a$.

5.2.1 Definição

A *reta* r que tem como inclinação o limite das inclinações das retas secantes ao gráfico de f passando pelo ponto A, determinada como descrito acima, é denominada *reta tangente* ao gráfico de f em $x = a$.

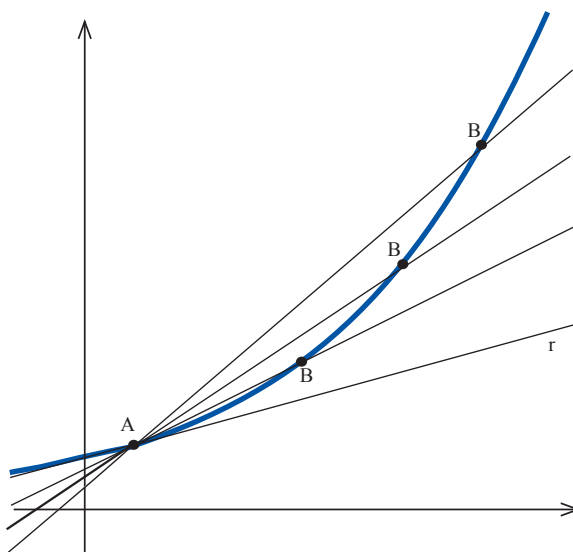



Figura 2 - Interpretação geométrica da taxa instantânea de variação

O valor da derivada da função $y = f(x)$, em $x = a$, é igual à inclinação da reta tangente ao gráfico de f em a.

6. EXERCÍCIOS

Para cada função abaixo, calcule a derivada no ponto indicado, desenhe o gráfico da função e a reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado:

a) $y = f(x) = 1 - 2x$ em $x = 2$;

b) $y = x^2 + 1$, em $x = 1$;

c) $y = f(x) = -x^3$, em $x = 1$;

d) $y = 2^t$, em $t = 0$.

Ainda, calcule as equações das retas tangentes em cada caso, nos pontos indicados.

7. REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

AULA 2

A FUNÇÃO DERIVADA[1]

OBJETIVO
Definir a função derivada. Deduzir regras de derivação. Calcular a derivada de uma função polinomial.

1. INTRODUÇÃO

Até aqui estivemos calculando a derivada de uma função em um ponto específico de seu domínio. Nesta aula, vamos desenvolver um processo para derivar a função em todos os pontos do domínio em que isto for possível, obtendo uma nova função.

Finalizamos com a dedução (intuitiva) de regras que irão nos auxiliar a obter a função derivada com maior agilidade.

2. A FUNÇÃO DERIVADA

2.1 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio *D*. A *função derivada* de f é a taxa instantânea de variação de f em x, para cada ponto $x \in D$ em que é possível calcular essa taxa.
Vamos formalizar essa definição de função derivada, para torná-la operacional. Com essa intenção, observe a Figura 1.

[1] Esta aula se constrói a partir da apresentada no livro *Cálculo I*, para o curso de Licenciatura em Química a Distância, com o conhecimento e de acordo com as autoras daquele texto.

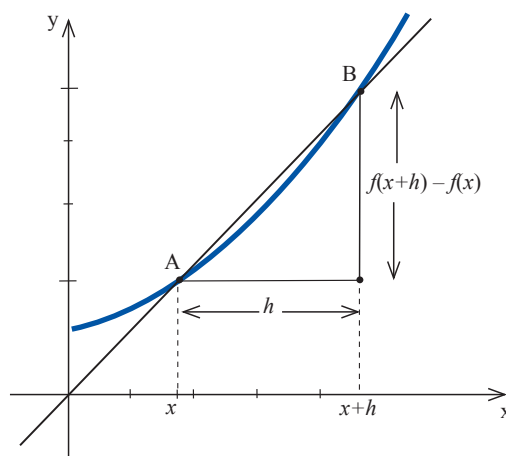



Figura 1 - Taxa média de variação de f no intervalo $[x, x+h]$

Nela, marcamos um valor x arbitrário no eixo Ox e consideramos um pequeno acréscimo h, adicionado a x. Vamos expressar o cálculo da derivada de f em um ponto x arbitrário como este. Para isso, escrevemos a expressão da taxa média de variação de y em $[x, x+h]$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Em seguida, pensamos em como obter a taxa instantânea de variação de y, fazemos h tender a zero.

2.2 Notações e linguagem

O processo de calcular o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando h tende a *zero* é denotado por $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Com a notação de 2.2, escrevemos:

2.3 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função com domínio *D*. A *função derivada* de f, denotada por f', é definida por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que seja possível calcular o limite.

Por motivos históricos,[2] existe mais de uma maneira de denotar a função derivada. A escolha entre notações vai depender de como vamos utilizá-la.

[2] O Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido, principalmente, pelo inglês Isaac Newton e pelo alemão Gottfried Leibniz, no século XVII. Para obter informações a esse respeito, consulte um livro de História da Matemática.

2.4 Notações e linguagem

Para $y = f(x)$, uma função com domínio *D*, existem duas maneiras mais adotadas para denotar sua função derivada de f:

1) Notação de Newton: $f'(x)$;

2) Notação de Leibniz: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$.

3. CALCULANDO A FUNÇÃO DERIVADA

Você verá que, embora o conceito de limite seja ainda pouco familiar, vamos ser capazes de determinar a função derivada para um número bastante grande de funções, discutindo intuitivamente.

3.1 Exemplo: cálculo da derivada de $y = f(x) = x^2$

Para calcular a derivada de $y = f(x) = x^2$, escrevemos primeiro a taxa média de variação de *f* em um ponto x.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h}.$$

Agora, devemos calcular o "limite" dessa expressão, quando h fica bem pequeno. Esse é um "ponto delicado" do cálculo: já sabemos que não podemos fazer $h = 0$ na expressão. Será que podemos mesmo cancelar o h, como fizemos em outros exemplos na aula anterior? Aqui também o h é múltiplo do numerador e do denominador na taxa média!

Para responder a essa questão, devemos nos certificar de que $h \neq 0$. E, para isso, vamos nos lembrar de como o h surgiu nessa história: ele foi um acréscimo dado a *x*, de tal forma que o intervalo $[x, x+h]$ fosse bem pequeno. Nesse caso, em que fazemos os cálculos para o intervalo $[x, x+h]$, o que importa mesmo é perceber que, nele, $h \neq 0$. Portanto, ele pode ser mesmo cancelado no cálculo anterior.[3]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

Fazendo $h \to 0$ na expressão acima, obtemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

[3] Um raciocínio análogo pode ser feito se considerarmos *h* negativo, e isso deve ser levado em conta.

Essa última passagem decorre do fato de que, quanto mais próximo de 0 estiver o h, mais próximo de $2x$ estará o $2x+h$. Assim, se $f(x)=x^2$, então, $f'(x)=2x$. Em termos do estudo de variações, isso significa que, para qualquer valor de x, a variação instantânea de y, bem próximo de x, é o dobro do valor de x.

3.2 Exemplo: a derivada de $y = f(x) = x^n$, para qualquer valor de *n* inteiro e positivo

Vamos calcular a derivada da função $y = f(x) = x^n$, para qualquer valor de n inteiro e positivo.

Como no exemplo anterior, escrevemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

No numerador desse quociente, temos o binômio de Newton[4] $(x+h)^n$. Vamos expandi-lo a seguir:[5]

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + a_{n-2}x^{n-2}h^2 + \ldots + a_2x^2h^{n-2} + a_1xh^{n-1} + a_0h^n.$$

Continuando o cálculo da taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + a_{n-2}x^{n-2}h^2 + \ldots + a_1xh^{n-1} + a_0h^n}{h}.$$

Veja que é possível colocar h em evidência, já que ele é fator de todos os termos do numerador. Isso possibilita reescrever a expressão para simplificá-la.

Como $h \neq 0$, podemos cancelá-lo no numerador e no denominador e, após o cancelamento, o único termo que não terá h como fator será o primeiro, já que todos os outros tinham uma potência de h maior que 1, em princípio. Portanto, apenas o primeiro termo não tenderá a zero após o cálculo do limite. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}.$$

A resolução deste exemplo estabelece a seguinte proposição:

3.2.1 Proposição

Se $y = f(x) = x^n$, na qual n é um número inteiro e positivo, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

[4] Se você quer estudar um pouco mais sobre os binômios de Newton, consulte algum livro do Ensino Médio.

[5] A lógica dessa expansão é a seguinte:

- ela é uma soma de $n+1$ monômios do tipo (constante).(potência de x).(potência de h);
- as potências de x decrescem de n até 0, a cada monômio;
- as potências de h crescem de 0 até n, a cada monômio;
- as constantes são obtidas na $(n+1)$-ésima linha do Triângulo de Pascal. Para os cálculos que realizaremos aqui, basta sabermos que a primeira constante é 1 e que a segunda é n.

3.3 Exemplo: derivada de uma função constante

Seja $y = f(x) = c$ uma função constante. De novo, vamos começar calculando a taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Nesse caso, ela já resultou em um valor constante, que é 0. Portanto, $f'(x) = 0$. Esse resultado já era esperado, já que *variação* de uma função *constante* é mesmo nula, não é? Demonstramos com este exemplo a seguinte proposição:

3.4 Proposição

Se $f(x) = c$ (constante), então $f'(x) = 0$.

4. DERIVADA DE MULTIPLICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO POR CONSTANTE

Para uma função $y = f(x)$ qualquer, vamos calcular a derivada da função $y = g(x) = cf(x)$, na qual c é uma constante real.

A expressão da taxa média de variação é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{c.f(x+h) - c.f(x)}{h} = \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h} = c.\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

O próximo passo para o cálculo de $g'(x)$ é calcular o limite do quociente anterior quando $h \to 0$.

Observe que a constante c está multiplicando a taxa média de variação da função f. Apesar de não termos demonstrado essa propriedade formalmente, é bastante razoável considerarmos que c não influenciará no cálculo do limite dessa última expressão e que o resultado será o produto de c pelo limite do quociente:[6]

$$\lim_{h \to 0}\left[c.\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = c.\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Temos, portanto, a seguinte proposição:

4.1 Proposição

Se c é uma constante e $f(x)$ *é* uma função, então

$$\frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx}[f(x)],$$

para todo x no qual f tem derivada.

[6] Você concorda com essa afirmação?

5. CALCULANDO A DERIVADA DE SOMA DE FUNÇÕES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções quaisquer. Vamos calcular a derivada da soma de *f* e *g*, isto é, vamos derivar a função $y = S(x) = f(x) + g(x)$.

Como sempre, escrevemos a taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}.$$

Em seguida, hora de reorganização: podemos reorganizar o numerador do último quociente desta forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

O próximo passo para o cálculo de $S'(x)$ é calcularmos o limite quando $h \to 0$.

Observe que a última expressão obtida é a soma entre as taxas médias de variação de *f* e de *g*. Apesar de não demonstrarmos essa propriedade formalmente, é razoável considerarmos que o limite da soma de duas funções seja igual à soma dos limites de cada uma das funções:[7]

$$\lim_{h \to 0}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

De modo semelhante, para a função $D(x) = f(x) - g(x)$, chegamos a seguinte proposição:

5.1 Proposição

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)],$$

para todo x no qual f e g têm derivada.

Com as proposições demonstradas aqui, você verá que temos condições de calcular a derivada de qualquer função polinomial.

6. EXEMPLO: DERIVADA DE UMA FUNÇÃO POLINOMIAL

Seja a função polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Utilizando a Proposição 5.1, temos:

[7] Você concorda com essa afirmação?

$$p'(x)=\frac{d}{dx}\left[a_n x^n\right]+\frac{d}{dx}\left[a_{n-1}x^{n-1}\right]+\ldots+\frac{d}{dx}\left[a_2 x^2\right]+\frac{d}{dx}\left[a_1 x\right]+\frac{d}{dx}\left[a_0\right].$$

Com a Proposição 4.1, temos:

$$p'(x)=a_n.\frac{d}{dx}\left[x^n\right]+a_{n-1}.\frac{d}{dx}\left[x^{n-1}\right]+\ldots+a_2.\frac{d}{dx}\left[x^2\right]+a_1.\frac{d}{dx}\left[x\right]+\frac{d}{dx}\left[a_0\right].$$

Por fim, utilizando as proposições 3.1 e 2.1, demonstramos:

6.1 Proposição

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial, então sua derivada é $p'(x) =n. a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + ... + 2.a_2 x + a_1$.

6.2 Exemplo: a derivada de $p(x)=3x^4-x^3-4x^2+10x-7$

Seja $p(x)=3x^4-x^3-4x^2+10x-7$.

$$p'(x)=3.4x^3-3x^2-4.2x+10=12x^3-3x^2-8x+10$$

6.3 Exemplo: a derivada de $p(x)=3x^4-x^3-4x^2+10x-7$ no ponto $x=1$.

No exemplo anterior, vimos que $p'(x)=12x^3-3x^2-8x+10$.

Então $p'(1)=12-3-8+10=11$.

7. EXERCÍCIOS

1. Utilizando as proposições desta aula, calcule as derivadas das seguintes funções polinomiais:

a) $f(x)=-\sqrt{3}x^7+\frac{3}{5}x^4+568x+12$

b) $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

2. Considere uma função quadrática genérica, $q(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Calcule $q'(x)$.

b) Calcule o valor de x para o qual $q'(x) = 0$.

c) Analise o crescimento e o decrescimento de q, supondo que $a>0$ e buscando relacioná-lo com o sinal da derivada da função.

3. Para $y = f(x) = ax + b$, calcule $f'(x)$ e interprete o resultado geometricamente. Relacione o sinal da derivada com o crescimento e decrescimento da função.

8. REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. (2008) *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG. (Educação a Distância)

AULA 3

Limites

OBJETIVOS
Introduzir o conceito de limite, para reescrever e operacionalizar os conceitos de taxa de variação instantânea e derivada. Calcular limites.

1. INTRODUÇÃO

Nas aulas 1 e 2, definimos os conceitos de taxa instantânea de variação, de reta tangente e de derivada. Encontramos a expressão da derivada da função $y = x^n$, onde $n \in IN$. Permeando todo o trabalho, um processo foi abordado de forma inteiramente intuitiva: o cálculo de *limites*.

Para trabalharmos as noções definidas com maior segurança, vamos examinar mais atentamente o processo pelo qual determinamos as derivadas. Esse é o tema desta aula.

2. LIMITES DE FUNÇÕES

2.1 Exemplo: o processo que uma função representa, próximo a um ponto

Como descrever o processo representado pela função

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2}\text{, próximo de } x=2\text{ ?}$$

Em primeiro lugar, verifique que $x = 2$ não pertence ao domínio da função que estamos estudando. Fatorando o numerador na expressão de $f(x)$, podemos escrever $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)}=x-2$, para $x \neq 2$.

Então o gráfico da função $f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$ é uma reta, excluindo o ponto $(2,0)$.

Mesmo que $(2,0)$ não esteja no gráfico da função, os valores $f(x)$, para valores de x muito próximos de 2, estarão muito próximos de zero. Confira nas figuras 1 e 2 o que estamos dizendo.

Em linguagem matemática, escrevemos

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0 \text{, ou seja, } \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0$$

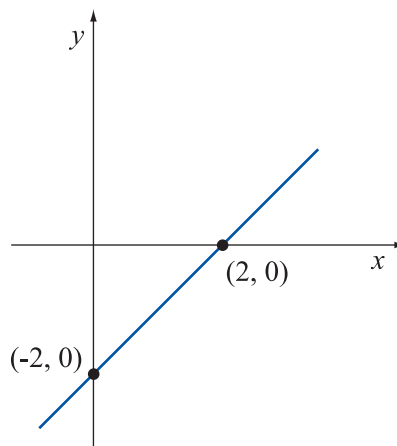



Figura 1 - Gráfico de $y = x - 2$

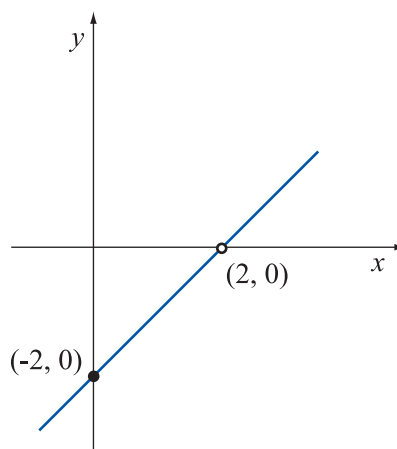



Figura 2 - Gráfico de $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

2.2 Exemplo: valor do limite e valor da função no ponto

Explore os exemplos na Figura 3. Para todas as funções representadas, o valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$ é o mesmo.

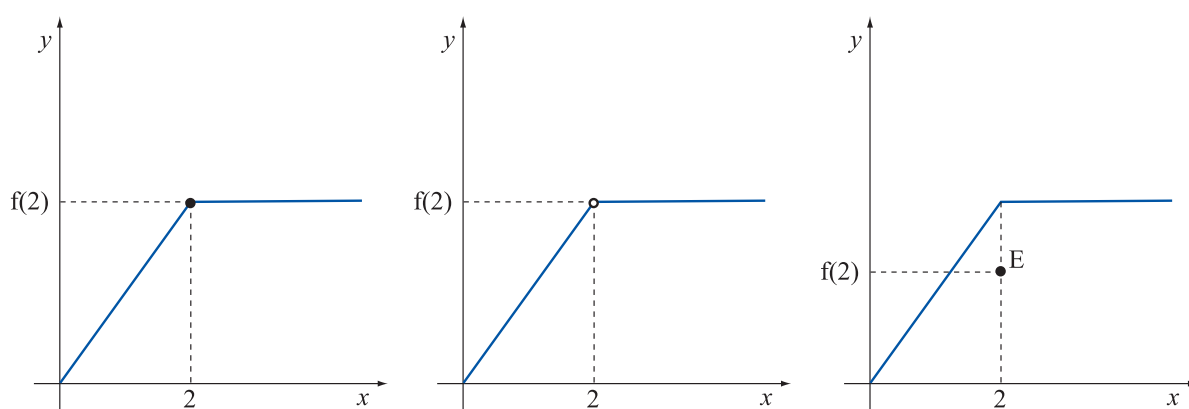



Figura 3 - O limite de f quando $x \to a$ não depende de $f(a)$

Isso porque, ao nos aproximarmos do ponto $x = 2$, valores da função estabilizam-se em torno de um mesmo valor, que não necessariamente será $f(2)$. Isso quer dizer que o que vamos denominar *valor do limite quando* x *tende para* a não corresponde ao valor $f(a)$, ou seja, ao valor da função no ponto $x = a$. Em resumo: ao conceituar o limite de uma função $f(x)$ quando x tende para a, interessa-nos retratar o processo (ou a ação) que a função representa (seu comportamento) em pontos de seu domínio próximos de a, exceto no ponto $x = a$.

Essas observações serão sintetizadas na definição a seguir, que ainda é intuitiva. Ela faz uso de palavras, tais como *arbitrariamente próximo* ou *suficientemente próximo*, que são imprecisas e podem significar coisas diferentes, em contextos distintos.

2.3 Definição informal de limites

Uma função f tem *limite* L quando x tende para a quando $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L para x suficientemente próximo de a.

2.4 Notação e Linguagem

No caso de uma função f ter limite L quando x tende para a escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

3. PROPRIEDADES DE LIMITES

De novo, vamos explorar o aspecto intuitivo do conceito de limites ao enunciar as regras básicas para seu cálculo.[1] Após enunciá-las, nossa intenção é a de utilizá-las para calcular limites em exemplos específicos.

3.1 Se f é a função identidade $f(x)=x$ então $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

3.2 Se c é uma constante, então $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então

3.3 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M$

3.4 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = L-M$

3.5 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = LM$

3.6 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$, se $M \neq 0$

Em linguagem informal: se os limites de f e g existem, os limites da soma, diferença, produto e quociente também existem e são, respectivamente, iguais a soma, diferença, produto e quociente dos limites de f e g.

4. EXEMPLOS: UTILIZANDO AS PROPRIEDADES DE LIMITES

1 - $\lim\limits_{x\to 3}(3x-2) = \lim\limits_{x\to 3}(3x) - \lim\limits_{x\to 3} 2$ (por 3.4)

$= 3\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 2$ (por 3.5)

$= 3\times 3 - 2 = 7$. (por 3.1)

2- $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2+2x+3\right) = \lim\limits_{x\to 4} x^2 + \lim\limits_{x\to 4} 2x + \lim\limits_{x\to 4} 3$ (por 3.3)

$= \lim\limits_{x\to 4} x \,.\, \lim\limits_{x\to 4} x + (2\lim\limits_{x\to 4} x) + 3$ (por 3.5 e 3.2)

$= 4\times 4 + 2\times 4 + 3$ (por 3.1)

3- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3+2x^3}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\left(x-3+2x^3\right)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)}$ (por 3.6, uma vez que $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1 \neq 0$)

$= \dfrac{-3}{-1}$ (por 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5)

$= 3$

[1] A definição formal de limite e a demonstração das suas propriedades podem ser encontradas em Leithold.

5. LIMITES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Ao examinar os exemplos da seção 4, você poderá se convencer de que os limites de qualquer função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

podem ser obtidos por substituição. Essa afirmativa se justifica numa lógica de aplicação de propriedades da seção 3 e se formaliza como a seguir:

5.1 Proposição

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, então

$$\lim_{x \to c} p(x) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$$

5.2 Exemplo: cálculo do limite de uma função polinomial

$$\lim_{x \to 2}(3x^4 - x^3 + 1) = 3(2)^4 - (2)^3 + 1 = 41.$$

6. LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS

Já mencionamos as funções racionais, que são quocientes de funções polinomiais $p(x)$ e $q(x)$. No domínio de sua expressão, $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, devemos ter $q(x) \neq 0$.

Pela Propriedade 3.6 e pela Proposição 5.1, é possível escrever:

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(c)}{q(c)}$, desde que $q(c) \neq 0$.

Em casos nos quais $q(c) = 0$, a situação se complica.

Nesta aula, vamos examinar uma das duas situações possíveis, e que corresponde a $p(c) = q(c) = 0$.

Observe que situações de cálculo de limites em que $p(c) = q(c) = 0$ foram recorrentes no cálculo de derivadas de polinômios. Por isso é muito importante nos organizarmos e desenvolvermos estratégias para resolvê-las.

Nos dois exemplos a seguir, estudamos situações que ocorrem muito no cálculo de limites de quociente de funções.

6.1 Exemplo: cancelando fatores comuns

Considere o limite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$.

Não podemos substituir $x=1$ na expressão da função racional $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$ porque o denominador se anula. Nessa expressão, o numerador também se anula em $x=1$. Por isso é possível decompormos ambos os polinômios e escrever[2]

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}=\frac{x-1}{x}\text{, se } x\neq 1$$

Por meio desta forma simplificada de escrever a função, obtemos o valor de seu limite por substituição:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x}=\frac{1-1}{1}=\frac{0}{1}=0\,.$$

Veja como foi construída a estratégia para o cálculo do limite deste exemplo. No caso específico que estamos abordando, $p(c)=q(c)=0$ significa que o número real c é raiz (ou zero) de ambos os polinômios $p(x)$ e $q(x)$. Isso quer dizer que ambos os polinômios são divisíveis por $(x-c)$. Relembrando que não nos interessa o valor da função em $x=c$ no cálculo do valor do limite, podemos cancelar esse fator comum. Reescrevendo a função inicial desse modo, podemos calcular o limite por substituição.

6.2 Exemplo: racionalizando e cancelando fatores comuns em quocientes de funções

Veja como resolver o limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$.

De novo, não podemos utilizar a Propriedade 3.6, porque o limite no denominador $\lim\limits_{h\to 0}h=0$.

No entanto, podemos reescrever a expressão usando a racionalização, para criar um fator comum:

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})\times(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{2+h})^2-(\sqrt{2})^2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(2+h-2)}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=$$

$$\frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\,.$$

[2] Lembre-se de que, se x_0 é raiz de um polinômio $p(x)$, então podemos fatorar $p(x)$, obtendo $(x-x_0)^n$ como um de seus fatores, em que n é a multiplicidade da raiz x_0. Isto é, $p(x)=q(x)(x-x_0)^n$.

Desse modo, $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Observe na Figura 4 que resolvendo esse limite nós calculamos a inclinação da reta tangente a $y=\sqrt{x}$, em $x=2$.

Aqui, ficou a questão sobre utilizar a estratégia de substituição do valor $h=0$ ao calcularmos $\lim_{h\to 0}\sqrt{2+h}$. Por enquanto, vamos deixá-la sem discussão.

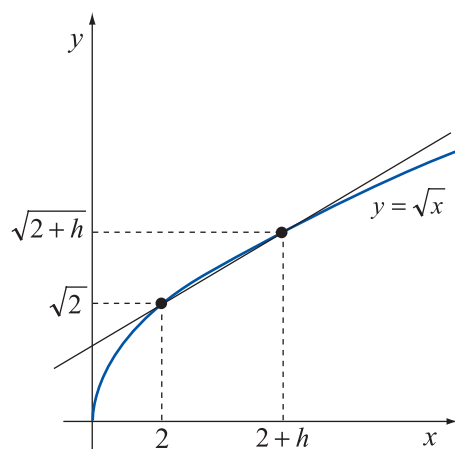



Figura 4 - reta secante a $y=\sqrt{x}$

Muitas outras questões ficam também sem respostas. Por exemplo, como resolver $\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)}$ nos casos em que $q(c)=0$ e $p(c)\neq 0$? Essas, e outras questões, serão abordadas nas duas próximas aulas.

Finalizamos com um teorema importante no cálculo de limites e, principalmente, na dedução das expressões das derivadas das funções trigonométricas.

7. TEOREMA DO CONFRONTO

Vamos enunciar um teorema que, para demonstrá-lo, é necessário definirmos limite formalmente, o que não é nossa intenção nesta disciplina.

No entanto, esse teorema é bastante intuitivo, e vamos nos convencer de seu enunciado explorando uma representação gráfica. Nossa intenção principal é a de utilizá-lo.

7.1 Proposição

Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ três funções reais satisfazendo $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ em um intervalo aberto contendo o ponto $x = c$, exceto talvez nesse ponto específico. Suponha ainda que $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$.

Então, existe o limite $\lim_{x \to c} f(x)$, e

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$.

O gráfico na Figura 5 sugere a situação expressa no teorema em termos algébricos. Veja que a função f fica espremida entre os gráficos de g e de h próximo ao ponto $x = c$, forçando a função f a se estabilizar também em $y = L$.

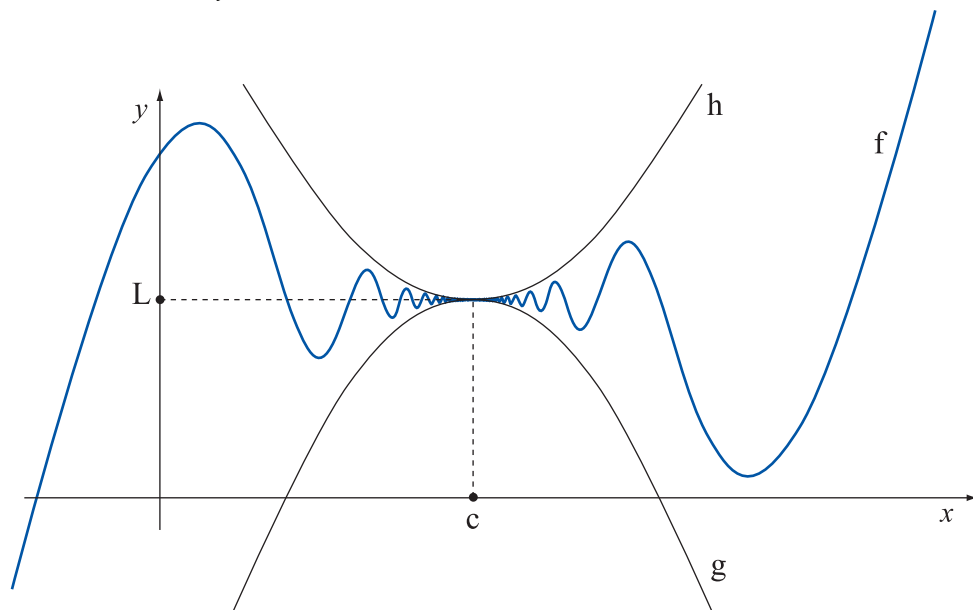



Figura 5 - Teorema do Confronto

7.2 Exemplo: cálculo de $\lim_{x \to 0} \left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

Ao calcularmos $\lim_{x \to 0} \left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, não podemos utilizar as regras e propriedades de limites estudadas porque, como veremos na próxima aula, o limite de $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe quando $x \to 0$. No entanto, podemos utilizar o Teorema do Confronto para resolvê-lo.

Primeiro, buscamos escrever a função $f(x) = x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$ entre duas funções g e h, que se estabilizam em um mesmo valor quando $x \to 0$.

Veja que podemos escrever

$-1 \le sen\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

Uma vez que $x^2 > 0$ podemos escrever

$-x^2 \le x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$

Uma vez que $\lim_{x \to 0}\left(x^2\right) = 0$, então, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \to 0}\left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$.

8. EXERCÍCIOS

Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x \to 3}(3x - 7)$
2. $\lim_{x \to 3}\left(\frac{5}{3x - 7}\right)$
3. $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1 - x}{x - 5 - 3x^2}\right)$
4. $\lim_{x \to -2}\frac{(x + 2)(x^3 - 2x)}{x^2 + x - 2}$
5. $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}\right)$
6. $\lim_{x \to 1}\frac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x^2 - x}$
7. $\lim_{x \to 0^-} 3x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $\lim_{x \to 0} x^4 sen\left(\frac{1}{x}\right)$
9. $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(2\pi x)$

9. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações.* Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill.

AULA 4

Cálculo de limites

OBJETIVOS
Ampliar estratégias para o cálculo de limites, discutindo casos em que ele não existe. Definir a noção de assíntota vertical.

1. INTRODUÇÃO

Um bom modo de entender um conceito em matemática é o de examinar exemplos que satisfazem sua definição e, ao mesmo tempo, compará-los com outros que não a atendem.

Em aulas anteriores, utilizamos a noção intuitiva de limite de uma função para estudar o comportamento de funções próximo a um ponto onde esse limite existia, calculando-o. Não nos detivemos, no entanto, nos casos em que seu cálculo não era possível. Pode acontecer de não existir o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Nesta aula, vamos examinar três casos exemplares, ou prototípicos, dessa situação, representados pelas funções:

$p(x)$, função preço da corrida de táxi,

$y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$,

$y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

Iniciamos com o estudo da primeira dentre as três.

2. LIMITES LATERAIS

Explore o gráfico da função preço da corrida de táxi, reproduzido na Figura 1. Quando os valores de x se aproximam, por exemplo, de $x = 1$, não há um único valor para o qual $P(x)$ se aproxima. Isso porque, se

x está próximo desse valor da abscissa, por valores menores do que 1, o preço da corrida de táxi está estabilizado em R$ 3,30. Se x está próximo de $x = 1$, por valores maiores, a função está estabilizada em R$ 4,97.

Situação similar a essa acontece em todos os outros pontos de coordenadas inteiras.

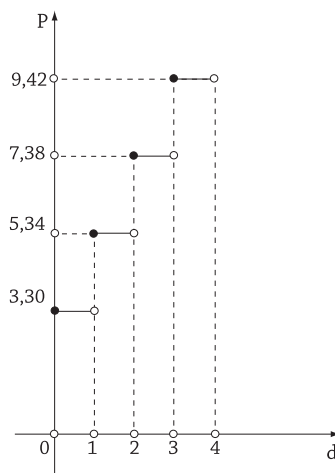



Figura 1 - Preço da corrida de táxi

Intuitivamente, para as funções que modelam exemplos como este, costumamos dizer que a função "salta"; e esse é um dos casos de não existência de limites de uma função. Vamos definir uma noção que nos ajuda a identificar algebricamente os "saltos" que mencionamos.

Da definição de limite da aula anterior, o critério adotado para identificar se uma função f tem limite L quando x aproxima o valor a corresponde a examinar se f estabiliza em $y = L$, à esquerda e à direita de $x = a$. Essa noção está definida a seguir.

2.1 Definição

Seja f uma função definida em (a, b), onde $a < b$. Dizemos que a função f tem limite lateral à direita L em a, se f estabiliza em L quando x fica próximo de $x = a$ no intervalo (a, b).

Seja f uma função definida em (c, a), onde $c < a$. Dizemos que a função f tem limite lateral à esquerda L em a, se f estabiliza em L quando x fica próximo de $x = a$ no intervalo (c, a).

2.2 Notação e linguagem

Se f tem limite lateral à direita L, escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Se f tem limite lateral à esquerda L, escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Os sinais + e – na notação dos limites laterais significam, respectivamente, que x se aproxima de a por valores maiores do que ele, ou que x se aproxima de a por valores menores.

2.3 Exemplo: cálculo de limites laterais

a) Podemos escrever, observando o gráfico da função preço da corrida de táxi, que

$$\lim_{x \to 2^+} p(x) = 6{,}64 \text{ e que } \lim_{x \to 2^-} p(x) = 4{,}97.$$

b) A função valor absoluto foi definida[1] como

$$|x| = \begin{cases} -x, & se \quad x < 0 \\ x, & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Aqui, vamos estudar a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$, se $x \neq 0$. Podemos defini-la por partes pelas expressões

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1, & se \quad x < 0 \\ \frac{x}{x} = 1, & se \quad x > 0 \end{cases}.$$

Os limites à esquerda e à direita de $x = 0$ são

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Como no exemplo anterior, o salto que a função dá em seu gráfico é retratado algebricamente por seus limites laterais, que são diferentes. Tente esboçar esse gráfico!

2.4 Proposição

Uma função f terá um limite quando x se aproximar de c se, e somente se, os limites laterais existirem e forem iguais. Em linguagem matemática, escrevemos:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

[1] Ver nosso livro *Introdução ao estudo das funções.*

2.5 Exemplo: cálculo de limites laterais

a) Examine o gráfico da função $y = f(x)$ na Figura 2 e confirme os seguintes cálculos:

Em $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x+1) = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Como os dois limites laterais existem e são iguais, escreveremos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Em $x = 1{,}5$, $\lim\limits_{x \to 1{,}5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1{,}5^-} (x+1) = 2{,}5$

$$\lim_{x \to 1{,}5^+} f(x) = \lim_{x \to 1{,}5^+} x^2 = (1{,}5)^2$$

Os dois limites laterais existem, mas são diferentes. Nesse caso, não existe $\lim\limits_{x \to 1{,}5} f(x)$.

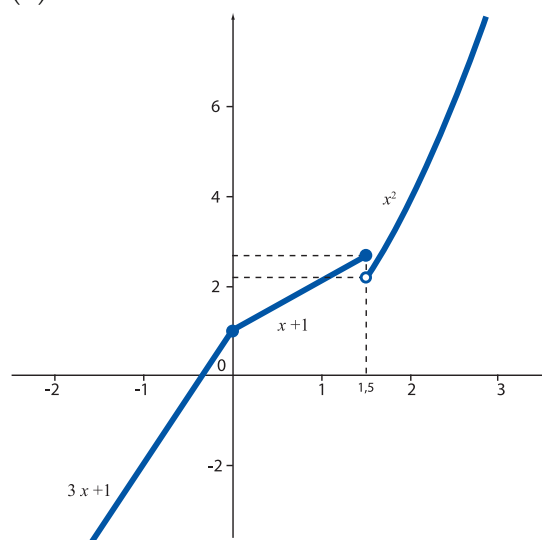



Figura 2 - Limites laterais existem, mas são diferentes

3. ASSÍNTOTAS VERTICAIS

A função $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ possui limite em todos os pontos de seu domínio.

Pelas Propriedades 3.1 e 3.6, apresentadas na Aula 3, podemos calcular seu limite por substituição e escrever

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}, \text{ desde que } c \neq 0.$$

Quando x se aproximar do ponto $c = 0$, as regras utilizadas em outros valores de x não são válidas, e o comportamento da função torna-se diferente e, portanto, importante de ser estudado. Quando x se aproxima de zero, seu valor absoluto fica muito pequeno, de modo que seu inverso fica muito grande, não se estabilizando em nenhum valor real. Em outras palavras: o limite não existe!

Explore o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, na Figura 3, e veja que não há como cercá-lo dentro de uma faixa $-M < y < M$ no plano, como no caso das funções seno e cosseno. Queremos dizer que, para qualquer número de valor absoluto M muito grande que pudermos imaginar, é possível escolhermos x próximo de zero de modo que $\frac{1}{x}$, em valor absoluto, ultrapassa o valor absoluto de M. Em linguagem matemática, escrevemos $\left|\frac{1}{x}\right| > |M|$ para x suficientemente próximo de zero.

Observe o sinal de x, que é positivo para valores à direita de zero, e negativo à esquerda de zero:

- Quando x se aproxima de zero, por valores maiores que zero, seu inverso fica muito grande, positivo.
- Quando x se aproxima de zero, por valores menores que zero, seu inverso fica muito grande em valor absoluto, mas negativo.

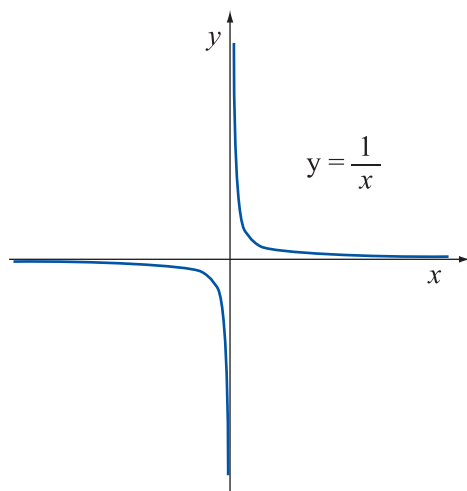



Figura 3 - Gráfico de $y = \frac{1}{x}$

Vale a pena distinguir essa variação de sinal, e para isso fazemos uso do conceito de limite à esquerda e à direita.

3.1 Notação e linguagem

Para expressar o comportamento de $y = \frac{1}{x}$ próximo de $x = 0$, vamos escrever $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Há alguns autores que escrevem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, não fazendo a distinção entre a variação de sinal existente, ressaltando apenas a não existência do limite pela magnitude dos valores da função.

Toda esta discussão está sistematizada, com o uso adequado de símbolos matemáticos, na definição a seguir.

3.2 Definição

Diremos que limite de $f(x)$ é $+\infty$ quando x tende para c à direita, e escrevemos $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty$, quando, para qualquer faixa no plano determinada por $y = M$, $M > 0$, houver um intervalo $(c, c+\varepsilon)$ de valores suficientemente próximos de $x = c$ de modo que $f(x) > M$, para $x \in (c, c+\varepsilon)$.

Diremos que limite de $f(x)$ é $+\infty$ quando x tende para c à esquerda, e escrevemos $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty$, quando, para qualquer faixa no plano determinada por $y = M$, $M > 0$, houver um intervalo $(c-\varepsilon, c)$ de valores suficientemente próximos de $x = c$ de modo que $f(x) > M$, para $x \in (c-\varepsilon, c)$.

Da mesma forma, podemos definir os limites $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty$.

3.3 Exemplo: limites infinitos de funções

a) Encontrar $\lim\limits_{x \to o} \frac{1}{x^2}$, caso exista.

Observe, em primeiro lugar, que a função não muda de sinal em torno do ponto $x = 0$. O denominador da expressão $\frac{1}{x^2}$ torna-se muito pequeno, de modo que a expressão da função fica muito grande, sempre positiva. Por isso, o limite não existe, e escrevemos $\lim\limits_{x \to o} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Esboce o gráfico dessa função e veja como é impossível encerrá-lo em uma faixa $-M < y < M$ do plano.

b) Calcular $\lim_{x\to+1} \frac{1}{(x-1)^2}$, caso exista.

Como no exemplo anterior, a função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ não muda de sinal no entorno do ponto $x = +1$. O denominador da expressão $\frac{1}{(x-1)^2}$ torna-se muito pequeno próximo de $x = +1$, de modo que a expressão fica muito grande, sempre positiva, e seu limite, quando $x \to +1$, não existe. Escrevemos: $\lim_{x\to+1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

c) Calcular $\lim_{x\to-3} \frac{1}{(x+3)}$, caso exista.

A discussão deste exemplo é semelhante à da função $y = \frac{1}{x}$, quando $x \to 0$, porque, como naquele caso, a função muda de sinal em intervalo aberto contendo o ponto $x = -3$. Temos $\lim_{x\to-3^-} \frac{1}{(x+3)} = -\infty$, porque o denominador é negativo, para $x < -3$.

Já o $\lim_{x\to-3^+} \frac{1}{(x+3)} = +\infty$, porque o denominador $(x+3) > 0$ para $x > -3$. De qualquer modo, o limite não existe.

Retome os exemplos de $y = \frac{1}{x}$ e de $y = \frac{1}{x^2}$ e veja que o gráfico de ambas as funções tem ramos que se aproximam e quase se confundem com a reta $x = 0$.

A característica dessa reta especial em relação ao gráfico da função, em termos algébricos, está expressa na definição a seguir.

3.4 Definição

Uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função $y = f(x)$ caso $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

3.5 Exemplo: procurando assíntotas verticais

Pela definição de assíntotas verticais de uma função, devemos procurá-las dentre os pontos fora do domínio da função.

Por exemplo, seja $f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-3}$. Analisando o denominador dessa

função, identificamos $x=\sqrt{3}$ e $x=-\sqrt{3}$ como possíveis assíntotas. Para confirmar, calculamos os limites: $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x(x-2)}{x^2-3}$ e $\lim_{x\to-\sqrt{3}} \frac{x(x-2)}{x^2-3}$.

Vamos resolver o primeiro, deixando o segundo como exercício.

Na expressão $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x(x-2)}{x^2-3}$, o numerador estabiliza em $\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$, que é um número negativo.[2] Já o denominador aproxima-se de zero quando $x\to\sqrt{3}$, mas variando o sinal em $x=\sqrt{3}$.[3] Assim, escrevemos: $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x(x-2)}{x^2-3}=+\infty$ e $\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x(x-2)}{x^2-3}=-\infty$.

3.6 Exemplo: resumindo os casos possíveis para os limites de funções racionais

Na aula anterior, calculamos limites de funções racionais $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ em duas situações especiais. No primeiro, resolvemos o limite por substituição: $\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$, desde que $q(c)\neq 0$. Em seguida, encontramos $\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)p_1(x)}{(x-c)q_1(x)}$, quando $p(c)=q(c)=0$.

Aqui, analisamos uma terceira situação, em que $q(c)=0$, mas $p(c)\neq 0$. Vamos resolver dois exemplos:

a) Calcular $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$, se existir.

O cálculo desse limite será feito por meio de uma análise intuitiva do quociente que representa a função. O numerador dessa fração racional se estabiliza em $(-1)^2-2\times(-1)=3$. O denominador fica muito pequeno, e sempre positivo. Um número real, como o 3, dividido por um número muito pequeno, fica muito grande, maior do que qualquer número M que escolhermos. Desse modo, escrevemos que $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} = +\infty$, e que o limite não existe.

b) Encontrar $\lim_{x\to-1} \frac{x^2-2x}{(x+1)}$, se existir.

O cálculo desse limite é semelhante ao anterior, exceto pelo fato de que seu denominador muda de sinal em qualquer intervalo (a,b), em que $a<-1<b$. Para valores menores do que -1, o sinal de $(x+1)$ é

[2] $\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$. Em consequência, $(\sqrt{3}-2)<0$.

[3] Analise o sinal do binômio de segundo grau x^2-3. Construa o quadro de sinais, escrevendo $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

negativo. Para valores maiores do que -1, o sinal de $(x+1)$ é positivo. Assim, devemos calcular os dois limites laterais $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-2x}{(x+1)}$ e $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x}{(x+1)}$.

Faça esses cálculos!

4. OSCILAÇÕES

A função $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ representa um caso importante de não existência de limites, que, no entanto, é mais difícil de discutir. Vamos fazê-lo aqui, intuitivamente.

Retome o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ (Figura 3). Veja que a imagem dessa função para x no intervalo $(0,1]$ é o intervalo $[1,+\infty)$.

A função $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, em seu domínio de definição, é a composta de duas funções:

$$y = g(x) = senx$$
$$y = f(x) = \frac{1}{x}.$$

Como discutimos anteriormente, a composta $g \circ f$ pode ser vista como uma coordenação de ações destas duas funções: $x \to f(x) \to g(f(x))$

No caso que estamos estudando,

$$x \to \frac{1}{x} \to sen\left(\frac{1}{x}\right)$$

Observe que a imagem de $(0,1]$, na primeira ação coordenada, será o intervalo $[1,+\infty)$. Desse modo, a ação de $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ vai comprimir, para $x \in (0,1]$, as imagens da função seno correspondentes a $x \in [1,+\infty)$.

Como todos os ciclos possíveis da função seno para $x \in [1,+\infty)$ vão acontecer para $x \in (0,1]$, todo o gráfico da função em $[1,+\infty)$ será comprimido, como uma mola, para caber em $(0,1]$. O resultado é uma oscilação completa da função para intervalos cada vez menores no eixo x, o que faz com que a função oscile tanto que não se estabilize próxima de nenhum valor, quando x está próximo de $x = 0$.

Veja o gráfico da função $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$, na Figura 5 a seguir.

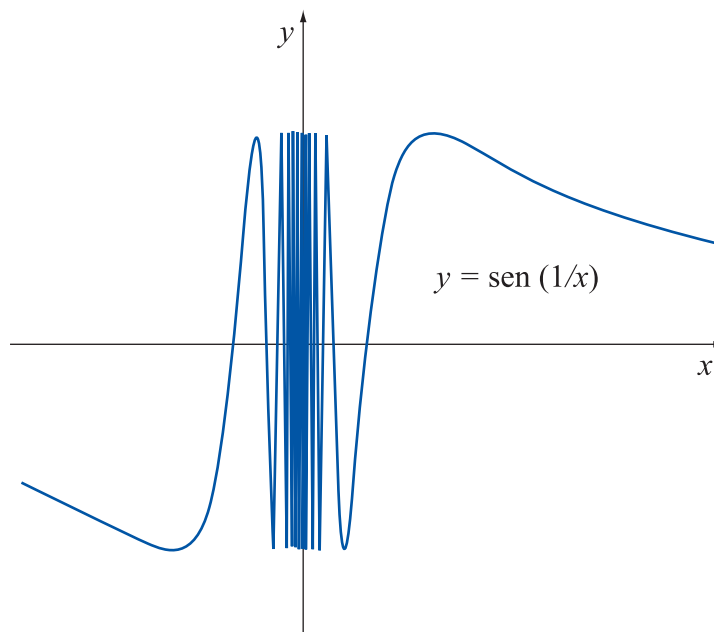



Figura 5 - Gráfico da função $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$

5. EXERCÍCIOS

1. Calcule os limites laterais $\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^3+1}$ e $\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^3+1}$, caso existam. O que você pode dizer sobre $\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^3+1}$? A reta $x = -1$ é uma assíntota vertical da função?

2. Determine os limites das seguintes funções racionais, caso existam:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3-1}$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^3-1}$ c) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^3-1}$

3. Determine os limites $\lim_{x \to -3^+} \frac{4-x}{x^2(x+2)}$ e $\lim_{x \to -3^-} \frac{4-x}{x^2(x+2)}$.

O que você pode dizer sobre $\lim_{x \to -3} \frac{4-x}{x^2(x+2)}$?

4. Encontre as assíntotas verticais da função $f(x) = \frac{2x}{x^2-x-2}$.

6. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FINNEY, R.; WEIR, M.; GIORDANO, F. *Cálculo*: George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley.

HUGHES-HALLETT, D. *et al*. *Cálculo e aplicações.* Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

Continuidade

OBJETIVO
Definir a noção de continuidade, utilizando-a para calcular limites de funções e zeros de equações polinomiais.

1. INTRODUÇÃO

Funções devem reproduzir as características dos fenômenos que elas modelam. Nesse sentido, a noção de *continuidade* e de *funções contínuas* na matemática representa uma proposta para modelar processos físicos que parecem acontecer de maneira ininterrupta, sem mudanças repentinas.

Por exemplo, veja o percurso de um objeto em queda livre: se deixamos cair uma pedra de uma altura de $20m$, ela não "pula" valores da altura em seu percurso, assumindo todos os valores das alturas entre 0 e $20m$, até atingir o solo.

Funções que modelam processos e fenômenos como esses são chamadas funções contínuas. Vamos estudá-las, bem como utilizar algumas consequências de sua definição no cálculo de limites.

2. CONTINUIDADE

As funções contínuas são funções para as quais mudanças pequenas em x acarretam mudanças também pequenas em $f(x)$. Se tal propriedade acontece em todo ponto de um intervalo de *IR*, ela se reflete no gráfico da função f, que pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel, sem saltos.

Para expressar algebricamente uma propriedade como essa, vamos descrever a condição, a ser estabelecida em cada um dos pontos do domínio de f, que impede que saltos aconteçam. Essa condição está expressa na definição a seguir.

2.1 Definição

Sejam $y = f(x)$ uma função real e $x = a$ um ponto no interior de seu domínio. Dizemos que f é *contínua em* $x = a$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Caso o ponto $x = a$ seja na extremidade do domínio da função, a função f pode ser denominada contínua à esquerda ou contínua à direita. Caso a condição expressa na definição 2.1 não se verifique no ponto $x = a$, a função é denominada descontínua em $x = a$.

2.2 Exemplo: funções contínuas e limites laterais

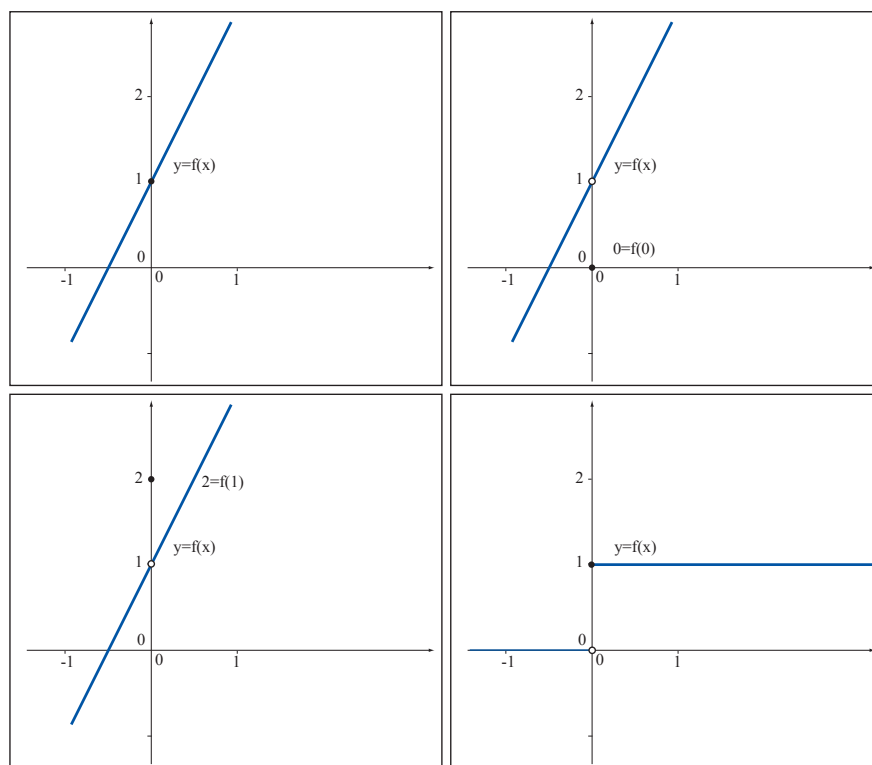



Figura 1 - Apenas a primeira função é contínua em $x = 0$

Observe os gráficos na Figura 1 e a classificação das funções que eles representam, em termos da noção de continuidade. Algebricamente, operacionalizamos essa classificação por meio de um teste.[1]

[1] Casos em que $x = a$ é um ponto da extremidade do intervalo em análise. O teste se refere ao cálculo de limites à esquerda ou de limites à direita.

2.3 Teste de continuidade

Dizemos que f é contínua em $x = a$ se, e somente se,

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. DETERMINANDO PONTOS ONDE f É CONTÍNUA

3.1 Exemplo: a função $y = [\![x]\!]$

A função $y = [\![x]\!]$, denominada "maior inteiro que não supera x", tem sua definição e seu gráfico parecido como o da função preço da corrida de táxi. Veja a Figura 2.

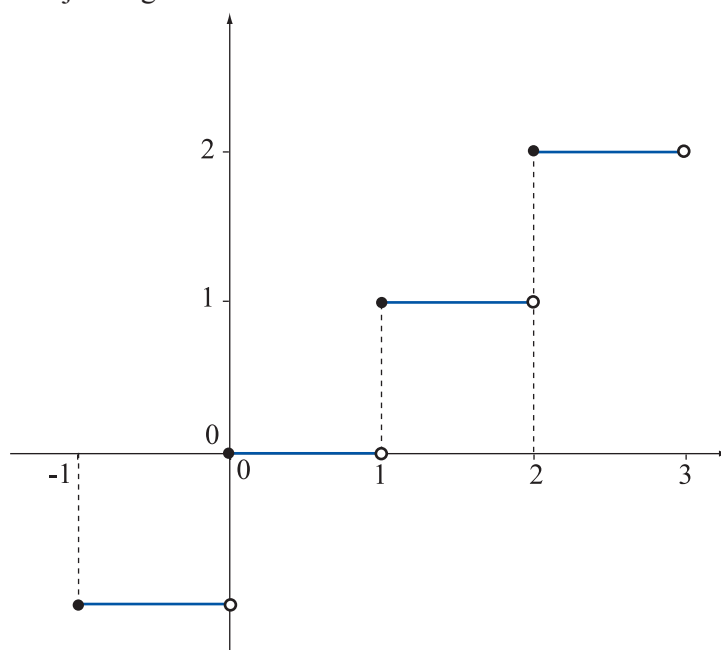



Figura 2 – A função maior inteiro que não supera x

Os valores da função são encontrados identificando o maior número inteiro contido na expansão decimal do número dado. Por exemplo, $[\![2{,}41]\!] = 2$ e $[\![1{,}98]\!] = 1$. Quando $x = a$ é um número inteiro, observe que $\lim_{x \to a^+} [\![x]\!] \neq \lim_{x \to a^-} [\![x]\!]$. Portanto, não existe $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ neste caso. Pelo teste de continuidade, a função não será contínua nesses pontos. Nos demais casos, a função é contínua.[2]

[2] Você sabe dizer por quê?

3.2 Definição
Uma função se diz *contínua num intervalo I* se, e somente se, ela for contínua em cada ponto de *I*.

3.3 Exemplo: continuidade em um intervalo

a) As funções potência e suas inversas, polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e suas inversas são contínuas em seu domínio e, portanto, em qualquer intervalo *I*, contido em seu domínio. A demonstração formal desse resultado é elaborada e não é essencial em um curso de Cálculo. Aqui, vamos justificar essa afirmação recorrendo à imagem que temos do esboço do seu gráfico, que não dá saltos. Vamos ter essa informação como um ponto de partida para construções teóricas das próximas aulas.

b) A função $y = \frac{1}{x}$ é contínua, em todos os pontos de seu domínio. O mesmo acontece com as funções racionais, que são quocientes de duas funções contínuas, as funções polinomiais.

4. CONTINUIDADE DE SOMAS, PRODUTOS E QUOCIENTES DE FUNÇÕES

Utilizando as propriedades de limites[3] enunciadas na Aula 3, podemos deduzir que somas, produtos e quocientes de funções contínuas em $x = a$ são contínuas neste ponto. Veja a proposição a seguir.

4.1 Proposição
Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções contínuas em $x = a$. Então, a soma $f + g$, a diferença $f - g$, o produto $f.g$ e o quociente $\frac{f}{g}$ (desde que $g(a) \neq 0$) são contínuas em $x = a$.

4.2 Exemplos: utilizando a Proposição 4.1

A Proposição 4.1 possibilita o cálculo de limites por substituição. Por exemplo, $\lim_{x \to 2} \frac{e^x + 2sen x}{x \ln x} = \frac{e^2 + 2sen 2}{2 \ln 2}$, porque a função $f(x) = \frac{e^x + 2sen x}{x \ln x}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio.[4]

[3] Ver seção 3, Aula 3.

[4] Você sabe construir um argumento para justificar a afirmação: $f(x) = \frac{e^x + 2sen x}{x \ln x}$ é contínua? Procure construí-lo!

5. CONTINUIDADE DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Além das operações de soma, diferença, produto e quociente de funções abordadas na proposição 4.1, a composição de duas funções contínuas f e g resulta também em uma função contínua $f \circ g$.

De fato, se x está próximo de c, a continuidade de g permite afirmar que $g(x)$ se estabiliza em $g(c)$. Se f for contínua em $g(c)$, então $f(g(x))$ se estabiliza em $f(g(c))$.

Esse resultado será enunciado na proposição a seguir.

5.1 Proposição

Se $y = g(x)$ é contínua em $x = c$, e $y = f(x)$ é contínua em $g(c)$, então $f \circ g$ é contínua em c.

5.2 Exemplo: utilizando a proposição 5.1

a) Calcular $\lim\limits_{x \to 3} cos(x^2+1)$.

A função $y = cos(x^2+1)$ é a composta de duas funções contínua: $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = (x^2+1)$.[5] Ambas as funções são contínuas em seu domínio, que é IR. Ainda, $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1) = 3^2+1 = 10$ e $\lim\limits_{x\to 10} cos(x) =$ cos(10). Assim, $\lim\limits_{x\to 3} cos(x^2+1) = cos\left(\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)\right) = cos(10)$.

b) Calcular $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$.

Temos que $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h^2+4h+5} = \left(\lim\limits_{h\to 0} h^2+4h+5\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, porque a função $y = \sqrt{x}$ é contínua. Desse modo, o limite a ser calculado resulta em uma expressão da forma $\frac{0}{0}$, que, como já vimos, é *indeterminada*, no sentido de que ela poderá ou não se estabilizar em um valor. Ou seja, pode ou não ter limite.[6] Em nosso caso, multiplicando o numerador e o denominador da expressão $\dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$ por $\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}$, que é diferente de zero, chegamos a:

$$\frac{h}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)}.$$

E, então,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

[5] E importante aprendermos a identificar as componentes numa função, composta de outras. Para treinar, retome o livro *Introdução ao Estudo das Funções*. Imagine que você tenha que calcular o valor da função num ponto utilizando uma calculadora, e identifique os comandos que você deveria executar para consegui-lo. No exemplo em questão, devemos primeiro fazer a "conta" x^2+1, para depois calcular o cosseno do resultado.

[6] Lembre-se de que todas as expressões que representam uma taxa de variação instantânea, ou derivada, são da forma $\frac{0}{0}$.

6. CONTINUIDADE DE FUNÇÕES QUE TÊM DERIVADA

Sejam $y = f(x)$ e a um ponto de seu domínio. Vamos discutir aqui a afirmativa:

6.1 Proposição

f derivável em $x = a \Rightarrow f$ contínua em $x = a$.

Demonstração

Se f é derivável em $x = a$, existe o limite

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$. Devemos provar que

$\lim\limits_{h \to o} [f(a+h) - f(a)] = 0$. Mas isso decorre do fato de que f é derivável em x, pois

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} \left[h \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \right] = \lim_{h \to 0} h . \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = 0 . f'(a) = 0$$

Assim, $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$. Isso significa que f satisfaz a definição de continuidade[7] em $x = a$.

7. A PROPRIEDADE DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Para finalizar esta aula, vamos enunciar um teorema que confirma o conceito de continuidade e funções contínuas como um bom modelo para representar movimento ou processos sem interrupções. Embora seu enunciado seja simples e intuitivo, sua prova matemática é complexa.[8]

O teorema captura, em linguagem matemática, a percepção que ressaltamos no exemplo na introdução desta aula: se deixamos cair uma pedra de certa altura, ela vai assumir todas as alturas entre a altura inicial e a altura zero, quando atinge o solo.

7.1 Teorema do Valor Intermediário

Seja $y = f(x)$ uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então, a função f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

[7] Um ponto x bem perto de $x = a$ pode-se escrever como $x = a + h$. Reescrevendo a expressão do limite nesta notação: $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

[8] Na verdade, enunciados matemáticos simples requerem, com frequência, construções sofisticadas em sua demonstração.

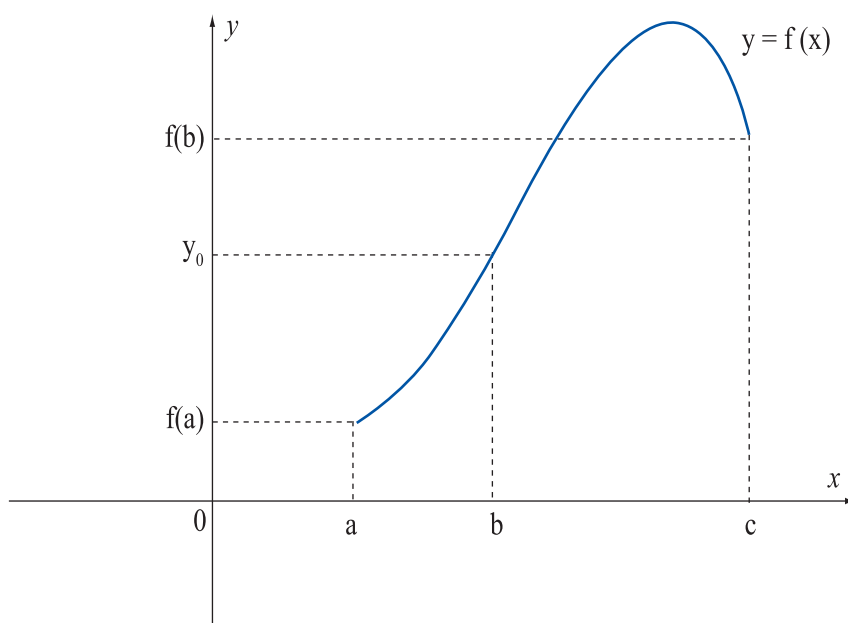



Figura 3 - A propriedade do Valor Intermediário

A Figura 3 representa a propriedade do Valor Intermediário, em um gráfico. Observe que, se $y = y_0$ for um valor ou ordenada entre $f(a)$ e $f(b)$, existe uma abscissa $x = b$, no intervalo $[a,b]$, tal que $f(b) = y_0$. Em síntese, a função f, definida em *I*, não "pula" valores no eixo *y* entre $f(a)$ e $f(b)$.

O Teorema do Valor Intermediário (TVI) é importante na construção da teoria do cálculo e tem uma aplicação interessante, na determinação de raízes de equações.

7.2 Exemplo: encontrando raízes de equações

Funções polinomiais $y = p(x)$ são funções contínuas em *IR*. São, portanto, contínuas em todo intervalo $I = [a,b]$ contido em *IR*. Se mostrarmos que os sinais de $p(a)$ e $p(b)$ são contrários, então, pelo TVI, deve haver uma raiz de $p(x) = 0$ em $[a,b]$.

Vamos explorar, como exemplo, a equação $x^3 - 3x - 1 = 0$. Para $p(x) = x^3 - 3x - 1$, temos $p(0) = -1$ e $p(2) = 1$. Sabendo que as funções polinomiais são contínuas, essa verificação é suficiente para afirmarmos, pelo TVI, que $x^3 - 3x - 1 = 0$ admite pelo menos uma raiz no intervalo $[0,2]$.

7.3 Uma consequência do Teorema do Valor Intermediário

Sejam $x_1 < x_2$ duas raízes consecutivas de uma função contínua f. Se $c \in (x_1, x_2)$ é um ponto qualquer, então o sinal de $f(c)$ é o mesmo sinal de $f(x)$ para todo $x \in (x_1, x_2)$.

Demonstração

Realmente, se existissem $a < b$ tais que $x_1 < a < b < x_2$ e $\begin{cases} f(a) < 0 < f(b) \\ \quad ou \\ f(a) > 0 > f(b) \end{cases}$, então, existirá $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.[9] Isso seria uma contradição com o fato de x_1 e x_2 serem raízes consecutivas de f (observe que $x_1 < a < c < b < x_2$, e, portanto, c seria uma raiz entre x_1 e x_2).

8. EXERCÍCIOS

1. Calcule $\lim_{x \to \pi} cos(x - \tan x)$ e $\lim_{x \to 4} \left[\sqrt[3]{x^2 + 1} - 2\right]$, usando o fato de que as funções envolvidas são contínuas. Procure justificar porque cada uma delas é contínua, a partir das propriedades estudadas.

2. Mostre que a equação $x^5 - 4x^4 - x^3 - 2x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0,1]$.

9. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FINNEY, R.; WEIR, M.; GIORDANO, F. *Cálculo*: George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG. (Educação a Distância)

SHENK, A. *Cálculo e geometria analítica*. Rio de Janeiro: Campus.

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

[9] Uma vez que zero é um valor intermediário entre os valores *f*(*a*) e *f* (*b*).

AULA 6

Identificando assíntotas horizontais

OBJETIVO
Definir limites quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$, e a noção de assíntota horizontal.

1. INTRODUÇÃO

Esta aula encerra a discussão sobre o conceito de limites. Finalizamos com uma análise sobre o que acontece com os valores de uma função $y = f(x)$ quando x se afasta muito da origem do sistema de coordenadas. Essa análise é importante em previsões de cenários futuros. Por exemplo, em estimativas sobre a absorção a longo prazo de uma droga num organismo ou em descrições das consequências de desastres ambientais como os de Chernobil ou o do aquecimento do planeta.

Os procedimentos e conceitos discutidos aqui serão retomados nas próximas aulas, principalmente ao traçarmos gráficos de funções.

2. IDENTIFICANDO ASSÍNTOTAS

Examine o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, na Figura 1. Você concorda que a reta $y = 0$ quase se confunde com o gráfico da função, de forma parecida com a descrita para a reta $x = 0$?

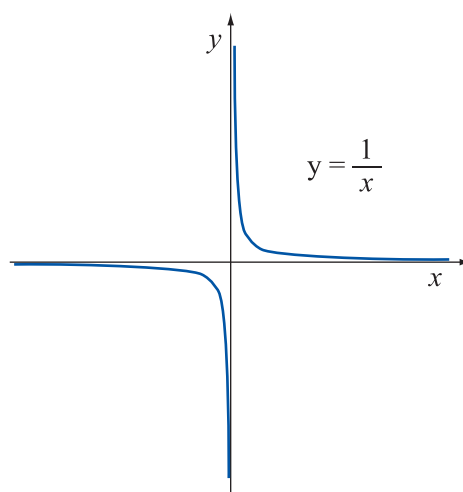



Figura 1 - Gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Podemos dar também a $y = 0$ o nome de assíntota ao gráfico de $y = \frac{1}{x}$, neste caso assíntota horizontal, e ainda dizer que os valores da função correspondentes a valores muito grandes de x se estabilizam em zero. Por outro lado, quando estudamos a função $y = \frac{1}{x}$ na Aula 4, discutimos a proximidade entre o ramo do gráfico e o da reta que acontece quando x está muito próximo da origem. No caso da reta $y = 0$, a proximidade entre os ramos acontece quando x se afasta muito da origem, à esquerda e à direita desta. Tais diferenças devem ser levadas em conta, e isso será feito definindo, em primeiro lugar, um conceito que expressa matematicamente a nossa percepção da estabilidade dos valores de funções quando x se afasta da origem.

2.1 Definição

Dizemos que $y = f(x)$ possui *limite* L quando x tende ao infinito quando os valores $f(x)$ se estabilizam em L à medida que x se distancia da origem, ou seja, à medida que x assume valores muito grandes. Em casos como esse, escrevemos: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Dizemos que $y = f(x)$ possui *limite* L quando x tende a menos infinito quando os valores $f(x)$ se estabilizam em L à medida que x se distancia da origem à sua esquerda, ou seja, quando x assume valores negativos com valor absoluto muito grande. Para esses, escrevemos: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

2.2 Definição

Dizemos que $y = L$ é uma assíntota horizontal da função $y = f(x)$ quando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

2.3 Exemplo: limites no infinito

A Lei de Gravitação Universal de Newton propõe:

- Toda partícula no universo atrai uma outra partícula com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de sua distância.

O que acontece com essa força de atração entre as partículas à medida que a distância entre as partículas aumenta muito?

Respondendo formalmente a essa questão, expressamos a *Lei de Gravitação* em linguagem matemática, escrevendo:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

onde F é a força de atração entre as partículas, G é uma constante (a constante gravitacional), m_1 e m_2 são as massas das partículas e r é a distância entre elas.

Em seguida, calculamos:

$$\lim_{r \to +\infty} F = \lim_{r \to +\infty} G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$$

O resultado se explica porque G, m_1 e m_2 são constantes e, para valores muito grandes de r, a expressão da fórmula se estabiliza em zero. De fato, dividir um número (constante), mesmo que muito grande, por números cada vez maiores, maiores do que qualquer número real M que escolhermos, resulta em valores que se estabilizam em zero.

Em outras palavras, esse resultado nos diz que, à medida que a distância entre as partículas aumenta indefinidamente, a força de atração tende para zero. Vale comentar que, uma vez que a noção de infinito é uma idealização matemática que não se concretiza na prática, a distância r será na verdade sempre finita e sempre haverá força de atração, embora esta já não possa ser medida em equipamentos de laboratório. Tais valores, não perceptíveis pelos instrumentos existentes de medição, correspondem ao que chamamos de "zero" nesta discussão.

Observe que $F = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função, num sistema de coordenadas cartesianas rF.

Antes de nos dedicarmos a outros exemplos, vamos sistematizar as regras usualmente utilizadas como suporte para resolvê-los na proposição a seguir.

2.4 Proposição

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções tais que

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ M. Então,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = L - M$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x).g(x)\right) = L.M$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(k.f(x)\right) = k.L$, para todo número real k

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

Propriedades idênticas valem para o caso de quando x tende a menos infinito. Essas propriedades estão descritas na tabela a seguir.

2.5 Proposição

Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções tais que

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ M. Então,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = L - M$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x).g(x)\right) = L.M$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(k.f(x)\right) = k.L$, para todo número real k

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

2.6 Exemplo: usando as regras das proposições 2.4 e 2.5

Estude o cálculo dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \dfrac{1}{x}\right) = 5$, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 = 5$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Neste caso, pela

Proposição 2.3, vale: limite da soma é a soma dos limites.

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+7/x}{2-3/x^2} = 1/2$, porque $\lim_{x\to+\infty}\left(1+7/x\right)=1$ e $\lim_{x\to+\infty}\left(2-3/x^2\right)=2$,

e, neste caso, pela Proposição 2.3, o limite do quociente é o quociente dos limites.

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(2/x+1\right)}{x\left(1-1/x\right)} = 1.$

d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2+x^3}{-x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(2/x^3+1\right)}{x^3\left(-1-1/x^3\right)} = -1.$

3. LIMITES DE FUNÇÕES RACIONAIS

Os exemplos em 2.6 são úteis no desenvolvimento de uma proposta para calcular limites de funções racionais $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $x\to+\infty$ (e também quando $x\to-\infty$). Nós vamos resolver três casos exemplares, como orientação.

3.1 Exemplo: $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios de mesmo grau

Para calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3+3x^2-x-1}{2x^3-4}$, escrevemos

$$\frac{5x^3+3x^2-x-1}{2x^3-4} = \frac{x^3\left(5+3/x-1/x^2-1/x^3\right)}{x^3\left(2-4/x^3\right)} = \frac{\left(5+3/x-1/x^2-1/x^3\right)}{\left(2-4/x^3\right)}.$$

Essa reescrita da expressão original é possível porque, no processo de limite que estamos considerando, os valores de x estão distantes da origem. Desse modo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+3x^2-x-1}{2x^3-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(5+3/x-1/x^2-1/x^3\right)}{\left(2-4/x^3\right)} = \frac{5}{2}.$$

3.2 Exemplo: o grau de $p(x)$ é menor do que o grau de $q(x)$

Ao calcularmos $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x-1}{2x^3-4}$, podemos, como no exercício anterior, escrever: $\dfrac{3x^2-x-1}{2x^3-4}=\dfrac{x^2\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}=\dfrac{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}$. Aqui, não podemos mais usar a regra do quociente de funções em 2.4. Observe que não existe $\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)$, uma vez que esse produto cresce indefinidamente, quando x se afasta da origem.[1]

Escrevemos: $\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=+\infty$. Já a função no numerador $\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ se estabiliza em $y=3$. Desse modo, o quociente $\dfrac{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}$ se estabiliza em zero e escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x-1}{2x^3-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}=0\,.$$

3.3 Exemplo: o grau de $p(x)$ é maior do que o grau de $q(x)$

E o que acontece com o limite do inverso do quociente que representa a função no exemplo anterior? Temos aí $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-4}{3x^2-x-1}$, que se reescreve como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4}{3x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}.$$

A função no numerador $\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ se estabiliza em $y=3$, e uma vez que os valores da função no numerador ficam muito grandes, escrevemos:

[1] Veja que $\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4}{x^3}\right)=2$' mas os valores do outro fator, que é x, ficam muito grandes.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4}{3x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x^3}\right)}{\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=+\infty\,.$$

Observe que quem efetivamente interfere no valor do limite de $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $x\to+\infty$ (e também quando $x\to-\infty$) são os termos de maior grau dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$.

Queremos dizer:

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+3x^2-x-1}{2x^3-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{2x^3}=\frac{5}{2}$, porque podemos cancelar o x^3 no numerador com o x^3 no denominador.

Do mesmo modo,

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x-1}{2x^3-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=0$, porque comparamos o x^2 do numerador com o x^3 do denominador. Observe que fica um x sobrando no denominador que faz tudo ir para zero.

E assim por diante. Essa discussão pode ser feita com os outros exemplos e também com aqueles que consideramos o limite quando $x\to-\infty$.

Vamos sintetizar essa última discussão a seguir.

4. SÍNTESE DA DISCUSSÃO PARA FUNÇÕES RACIONAIS

Para calcular limites de funções racionais $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $x\to+\infty$ (e também quando $x\to-\infty$) podemos considerar apenas o limite do quociente do termo de maior grau do polinômio $p(x)$ no numerador, sobre o termo de maior grau do polinômio $q(x)$ do denominador.
Por exemplo, se

$$p(x)=10x^4+2x^3-3x^2+1 \quad \text{e} \quad q(x)=2x^{10}-4x^3-\frac{3}{2}x+\pi\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^4}{2x^{10}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^6}=0\,.$$

O mesmo procedimento vale para o caso $x\to-\infty$.

Sabe por que nós não dissemos isso antes? Por acreditarmos que devemos entender o porquê das regras e estratégias que utilizamos em matemática para tornar mais fácil o trabalho com elas, a longo prazo.

5. EXERCÍCIOS

1. Calcular os seguintes limites, se existirem:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-4}{3x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x-1}{2x^3-4}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3+3x^2-x-1}{2x^3-4}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3-2x+4}{3x^2+2x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^3}{x^3-5x^2+5}$ e f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-1}{x^5}$.

2. Encontre as assíntotas horizontais de $y=\dfrac{x^3+2x}{3x^3-4}$ e $y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$, caso existam.

3. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{cos\left(1/x\right)}{1+1/x}$, se existirem.

4. Esboce o gráfico de uma função que possua a reta $y=\dfrac{3}{2}$ como assíntota horizontal.

5. Em cada item, esboce o gráfico de uma função que satisfaça:

a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$, $f(1)=1$

b) $f(2)=3$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

6. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG. (Educação a Distância)

SHENK, A. *Cálculo e geometria analítica*. Rio de Janeiro: Campus.

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

AULA 7

Regras de derivação: produto e quociente

OBJETIVO
Deduzir e utilizar fórmulas para o cálculo da derivada de um produto ou de um quociente de duas funções deriváveis.

1. INTRODUÇÃO

Vamos retomar aqui o estudo de derivadas, introduzido em nossas duas primeiras aulas. Lá exploramos o conceito, bem como algumas de suas interpretações (inclinação da reta tangente ao gráfico, velocidade instantânea). Entretanto, não nos voltamos para o seu cálculo operacional, isto é, não desenvolvemos ferramentas (técnicas, estratégias) que nos permitissem calcular derivadas de funções mais gerais, construídas a partir de funções cujas derivadas são conhecidas. A discussão iniciada foi interrompida pelo estudo de limites, motivado especialmente pela necessidade de desenvolver esses procedimentos para o cálculo de derivadas.

É bem verdade que já sabemos calcular a derivada de uma função polinomial. Isso foi feito utilizando duas regras simples de derivação justificadas intuitivamente: a do produto de uma função por uma constante ($[cf(x)]' = cf'(x)$) e a da soma ou diferença de duas funções ($[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$).

Porém, mesmo sabendo como calcular a derivada de uma função polinomial, não desenvolvemos uma regra, por exemplo, para o cálculo da derivada de uma função racional (quociente de funções polinomiais) ou mesmo da derivada de um produto de duas funções polinomiais. Nesse último caso, poderíamos efetuar o produto e, então, derivaríamos a função polinomial resultante. Mas, se escolhêssemos esse caminho, teríamos um trabalho enorme, dependendo do número de fatores em cada polinômio.

Nesta aula, vamos utilizar a caracterização da derivada como o limite de taxas médias de variação, apresentada na primeira aula, para obtermos duas regras de derivação que nos ajudam a calcular derivadas de funções mais gerais. Por exemplo, vamos aprender a derivar funções que se escrevem como produtos e quocientes das funções já estudadas, e mesmo algumas funções trigonométricas que se escrevem como quocientes de outras funções trigonométricas.

2. REGRA DE DERIVAÇÃO: PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES

Suponha que f e g sejam duas funções deriváveis no ponto x, isto é, tais que as derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ existam. Uma questão natural que se coloca é a seguinte: se a função produto, $f \cdot g$, possuir derivada no ponto x, seria possível calcularmos essa derivada a partir de $f'(x)$ e de $g'(x)$, que são conhecidas?

Possivelmente, uma primeira resposta, inteiramente motivada pela simples intuição a partir da regra de derivada da soma de duas funções e por um hábito, natural, de busca por generalizar procedimentos, poderia ser na forma de outra pergunta: a derivada do produto não seria o produto das derivadas?

Veremos que não! De fato, vamos concluir que a derivada do produto de duas funções se calcula por outra fórmula, não tão simples como a que pode nos parecer tão natural, sugerida por um impulso imediato, como explicitamos anteriormente. Por outro lado, ela não deixa de ser de fácil memorização.

Comecemos pela tentativa natural na matemática, que é a de retomar a definição: vamos desenvolver a taxa média de variação da função produto, procurando escrevê-la em termos das taxas médias de variação das funções f e g.

Se $y = f(x)g(x)$, sua taxa média de variação é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Para que possamos escrever essa expressão em termos das taxas médias de f e de g, vamos somar e subtrair no denominador acima o termo $f(x)g(x+h)$. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] g(x+h) + f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right].$$

Observe que os termos entre colchetes são as taxas médias de variação das funções f e g, respectivamente (“matemágica”!). Como sabemos

que as derivadas de f e de g existem, podemos usar as propriedades do limite de somas e produtos de funções, e escrever

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right].\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x).\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

Nesta última expressão, sabemos que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right],\ g'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right],\ f(x)=\lim_{h\to 0}f(x)$$

e $g(x)=\lim_{h\to 0}g(x+h)$.[1]

Mas $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é exatamente a taxa de variação instantânea da função produto $f(x)g(x)$, ou seja, a derivada $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$. Das expressões anteriores acabamos de concluir que tal derivada existe e que seu valor pode ser calculado por $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. Esta conclusão está formalizada na Proposição 2.1 a seguir, denotando a derivada $[f(x).g(x)]'$ do produto $f\cdot g$ por $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]$.

2.1 Proposição (Regra de Derivação do Produto)

Se f e g possuem derivadas no ponto x, então, a função produto $y=f(x)\cdot g(x)$ também possui derivada no ponto x e essa derivada pode ser calculada pela fórmula:

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)]=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

2.2 Exemplo: derivada de um produto de funções polinomiais

Vamos ilustrar a Regra de Derivação do Produto calculando a derivada da função

$p(x)=(x^3+2x+5)(7x^5-2x^4+x^3+x^2-9)$, no ponto $x=1$.

Por essa Regra, temos, para um x qualquer:

$$\begin{aligned}p'(x)&=(x^3+2x+5)'\,(7x^5-2x^4+x^3+x^2-9)+(x^3+2x+5)(7x^5-2x^4+x^3+x^2-9)'\\&=(3x^2+2)(7x^5-2x^4+x^3+x^2-9)+(x^3+2x+5)(35x^4-8x^3+3x^2+2x)\end{aligned}$$

Assim,

$$p'(1)=(3+2)(7-2+1+1-9)+(1+2+5)(35-8+3+2)=5\times(-2)+8\times 32=246$$

[1] Já sabemos que uma função que *tem derivada* em *x tem que ser contínua* nesse ponto.

Se optarmos por não utilizar a Regra de Derivação do Produto, podemos expandir o produto dos polinômios e, então, derivar o polinômio de grau 8 resultante. Encontramos,

$$p(x) = 7x^8 - 2x^7 + 15x^6 + 32x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 18x - 45$$

após efetuarmos 15 multiplicações (!) e agruparmos os termos de mesmo grau. Em seguida, encontramos

$p'(x) = 56x^7 - 14x^6 + 90x^5 + 160x^4 - 32x^3 - 6x^2 + 10x - 18$ e, finalmente, $p'(1) = 246$.

Observe que o trabalho é muito grande, e a utilização da regra do produto é econômica em termos de manipulações algébricas para obtermos a derivada do produto.

2.3 Exemplo: a derivada de $y = [u(x)]^n$ (n inteiro positivo)

Podemos aplicar a Regra de Derivação do Produto para deduzir uma fórmula para a derivada de uma função da forma $y = [u(x)]^n$ em que n é um inteiro positivo e u é uma função que possui derivada em x.

Comecemos com $n = 2$. Assim, desejamos derivar a função $[u(x)]^2$. Pela regra da derivação do produto (observe que $[u(x)]^2 = u(x)\,u(x)$), temos:

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^2 = u'(x)u(x) + u(x)\,u'(x) = 2u(x)u'(x)\,.$$

Agora, uma vez que $[u(x)]^3 = [u(x)]^2 u(x)$, aplicamos novamente a regra da derivação do produto e, com o auxílio da expressão que deduzimos para a derivada de $[u(x)]^2$, encontramos:

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^3 = \frac{d}{dx}\left\{[u(x)]^2\,u(x)\right\} = \left(\frac{d}{dx}[u(x)]^2\right)u(x) + [u(x)]^2\,\frac{d}{dx}u(x)$$
$$= 2\,u(x)\,u'(x)\,u(x) + [u(x)]^2\,u'(x) = 3[u(x)]^2\,u'(x).$$

Você pode se convencer de que, se aplicarmos "indutivamente" os argumentos acima, e o fato de que $[u(x)]^n = [u(x)]^{n-1}u(x)$, então, chegaremos à seguinte fórmula de derivação:

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}u'(x).$$

Assim, por exemplo, a derivada da função $u(x) = \left(3x^2 - 5x + 4\right)^8$ é $u'(x) = 8\left(3x^2 - 5x + 4\right)^7(6x - 5)$.

2.4 Exemplo: a derivada de $y = [u(x)]^{\frac{1}{n}}$ (n inteiro positivo e $u(x) > 0$)

Agora vamos aplicar novamente a Regra de Derivação do Produto para desenvolver uma fórmula para a derivada de uma função da forma $y = [u(x)]^{\frac{1}{n}}$, admitindo que exista a derivada $u'(x)$ e que $u(x) > 0$.

Assim como antes, comecemos com $n = 2$, isto é, vamos encontrar a derivada de $\sqrt{u(x)}$. Como $u(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)^2$, temos $u(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{u(x)}\right)^2$. Utilizando a regra de derivação que deduzimos na seção anterior, encontramos $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{u(x)}\right)^2 = 2\sqrt{u(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{u(x)}$. Podemos, então, concluir que $u'(x) = 2\sqrt{u(x)}\frac{d}{dx}\sqrt{u(x)}$ de onde obtemos

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u(x)} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}.$$

Por exemplo, no caso em que $u(x) = x$, se admitirmos que a função $\sqrt{x}$ possui derivada em $x > 0$ concluímos que esta derivada deve ser dada por

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Agora, calculemos a derivada de $[u(x)]^{\frac{1}{3}}$ aplicando novamente a fórmula de derivação de uma potência (deduzida na seção anterior), pois $u(x) = \left([u(x)]^{\frac{1}{3}}\right)^3$. Assim, encontramos

$u'(x) = 3\left([u(x)]^{\frac{1}{3}}\right)^2 \frac{d}{dx}\left([u(x)]^{\frac{1}{3}}\right)$ de onde segue que

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}[u(x)]^{-\frac{2}{3}}u'(x).$$

Continuando um processo indutivo, não é difícil encontrarmos a seguinte fórmula para a derivada da função $[u(x)]^r$ se $r = \frac{1}{n}$, admitindo que $u(x) > 0$ e que a derivada $u'(x)$ exista:

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^r = r[u(x)]^{(r-1)}u'(x).$$

Você está convidado a demonstrar essa fórmula, bem como a verificar que ela retrata os casos que desenvolvemos acima ($r = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{3}$).

Podemos chegar ainda mais longe[2] e deduzir que esta fórmula também é válida para qualquer número racional $r = \frac{n}{m}$ com n e m inteiros positivos.[3]

Por exemplo, para $u(x) = x$ e um número racional r qualquer, podemos provar que, se a derivada de x^r existir em $x > 0$ ela será dada por:

$$\frac{d}{dx}\left[x^r\right] = rx^{r-1}.$$

Você pode observar que essa fórmula, conhecida como a Regra da Potência, é a mesma que foi deduzida na Aula 2 para a derivada do monômio x^n .

[2] Com o auxílio da função exponencial, veremos que a fórmula também é válida para os números irracionais. Portanto, ela é verdadeira para qualquer número real r (pelo menos se u for derivável em x e se $u(x) > 0$)!

[3] Veja o Exercício 3 ao final desta aula.

3. REGRA DE DERIVAÇÃO: QUOCIENTE DE DUAS FUNÇÕES

Agora vamos deduzir uma regra para a derivada do quociente de duas funções, isto é, para uma função da forma $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.[4]

A taxa média de variação da função y é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

Reduzindo ao mesmo denominador a expressão entre colchetes encontramos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\right] = \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{\Delta x}\right].$$

Para escrever a expressão em termos das taxas média de variação das funções f e g, vamos subtrair e somar $g(x)f(x)$ (mais "matemágica"!) no numerador da expressão entre colchetes acima e separar a expressão resultante em uma soma de duas parcelas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[\frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{\Delta x}\right]$$
$$= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{\Delta x}\right].$$

Veja que, como pretendíamos, apareceram as taxas de variação de f e de g na expressão da variação média da função $y = \frac{f(x)}{g(x)}$!

Para concluir e obter a expressão para a derivada, ou taxa de variação instantânea, do quociente das duas funções, devemos tomar o limite quando $h \to 0$ da última expressão:[5]

[4] É claro que devemos assumir que $g(x) \neq 0$, pois os pontos do domínio da função y são aqueles em que o denominador não se anula.

[5] Observe que, assim como na dedução da regra do produto, utilizamos propriedades do limite da soma e produto de funções, bem como os seguintes fatos:
$g(x) = \lim_{h \to 0} g(x+h)$,
$g(x) = \lim_{h \to 0} g(x)$ e
$f(x) = \lim_{h \to 0} f(x)$.
O primeiro foi comentado na nota de rodapé anterior e os dois últimos são devidos à aplicação da propriedade: o limite de uma constante é o valor da constante (enquanto h está tendendo a zero os valores de $f(x)$ e de $g(x)$ não mudam, isto é, são constantes).

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right)\left[\lim_{h\to 0}\left(g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x}\right)-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{1}{g(x)\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)}\left[g(x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{\Delta x}\right)-f(x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{g(x)g(x)}\right)\left[g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\right]=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^{2}}.$$

Uma vez que $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, deduzimos a regra de derivação para o quociente de funções que enunciamos a seguir, denotando a derivada $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ do quociente $\frac{f}{g}$ por $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$.

3.1 Proposição (Regra de Derivação do Quociente)

Se f e g possuem derivadas no ponto x e se $g(x)\neq 0$, então, a função quociente $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ também possui derivada no ponto x e essa derivada pode ser calculada pela fórmula:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{\left[g(x)\right]^{2}}.$$

3.2 Exemplo: a derivada de uma função racional

Vamos calcular a derivada da função racional $r(x)=\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{x^4-5x^3+x+22}$ no ponto $x=0$, utilizando a regra de derivação do quociente.

Da fórmula que deduzimos na Proposição 3.1, temos,

$$r'(x)=\frac{(x^4-5x^3+x+22)(2x^3-5x^2+4x-1)'-(x^4-5x^3+x+22)'\,(2x^3-5x^2+4x-1)}{\left(x^4-5x^3+x+22\right)^2}$$

$$=\frac{(x^4-5x^3+x+22)(6x^2-10x+4)-(4x^3-15x^2+1)(2x^3-5x^2+4x-1)}{\left(x^4-5x^3+x+22\right)^2},$$

de onde obtemos $r'(0)=\frac{22\times 4-1\times(-1)}{22^2}=\frac{89}{484}$

4. RESUMO DAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

Para futuras consultas, vamos resumir, na tabela seguinte, as regras de derivação que estudamos até agora. Na tabela, a e b denotam constantes, u e v denotam funções de x:

Regras de Derivação	
y	y'
$au \pm bv$	$au' \pm bv'$
$u\,v$	$u'v + uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
u^r	$y' = u^{r-1}u'$

5. EXERCÍCIOS

1. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ para:

a) $y = (5x^9 - 2x^5 + 4)(7x^7 - 42x^2 + 5)$

b) $y = \dfrac{3x+1}{4x^3 + 9}$

c) $y = \dfrac{\left(-4x^5 + 13x - 8\right)^2}{5x+2}$

d) $y = \left(9x^5 - 2x^3 + 1\right)^{98}$

e) $y = \left(\dfrac{9x^3 + 2x + 5}{3x^4 + 12}\right)^9$

f) $y = \dfrac{\left(x^3 + 2x - 1\right)^3}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

2. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \sqrt{x}$ no ponto (1,1).

3. Utilize as fórmulas $\frac{d}{dx}[v(x)]^2 = 2v(x)v'(x)$ e
$\frac{d}{dx}[u(x)]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}[u(x)]^{-\frac{2}{3}}u'(x)$, deduzidas nesta aula, para mostrar que
se $u(x) > 0$ e $u'(x)$ existe, então $\frac{d}{dx}\left([u(x)]^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}[u(x)]^{-\frac{1}{3}}u'(x)$.

Sugestão: observe que $[u(x)]^{\frac{2}{3}} = \left([u(x)]^{\frac{1}{3}}\right)^2$ e faça $v(x) = [u(x)]^{\frac{1}{3}}$.

4. Encontre a derivada da função $y = (2x^8 + 5x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}$ e seu valor em $x = 0$.

6. REFERÊNCIA

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

AULA 8

Derivadas de funções trigonométricas e exponenciais

OBJETIVO
Apresentar as derivadas das funções trigonométricas e das funções exponenciais.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos calcular as derivadas das funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tan(x)$, bem como a derivada da função exponencial geral a^x, com destaque para a exponencial de base *e*. As derivadas das demais funções trigonométricas são apresentadas no texto e seus cálculos, deixados como exercício.

2. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS *sen(x), cos(x)* E *tan(x)*

Comecemos escrevendo a taxa média de variação da função $y = sen(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen(x+\Delta x) - sen(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{sen(x)\,cos(\Delta x) + sen(\Delta x)\,cos(x) - sen(x)}{\Delta x} = cos(x)\left(\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right) + sen(x)\left(\frac{cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right).$$ [1]

Nosso objetivo é calcular a taxa de variação instantânea da função $y = sen(x)$, ou seja, a sua derivada, que é calculada como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx} sen(x)$. Observando a expressão que desenvolvemos anteriormente para $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, notamos a dependência de Δx somente em

[1] Nesse desenvolvimento, utilizamos a identidade $sen(a+b) = sen(a)\,cos(b) + sen(b)\,cos(a)$.

$\left(\dfrac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right)$ e em $\left(\dfrac{cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right)$. Os fatores $cos(x)$ e $sen(x)$ não serão afetados pelo limite, quando Δx tender a zero. Assim,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=cos(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right)+sen(x)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right)=A\,cos(x)+B\,sen(x),$$

onde as constantes $A=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{sen(\Delta x)}{\Delta x}\right)$ e $B=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{cos(\Delta x)-1}{\Delta x}\right)$. Esses dois últimos limites são denominados *limites trigonométricos fundamentais*, pelo seu papel central no cálculo das derivadas das funções trigonométricas.

Antes de prosseguirmos, vale registrar esse fato interessante que acabamos de verificar:

$$\frac{d}{dx}sen(x)=A\,cos(x)+B\,sen(x),\text{ para todo } x.$$

Você vai deduzir no Exercício 5 a taxa de variação instantânea do cosseno, encontrando

$$\frac{d}{dx}cos(x)=B\,cos(x)-A\,sen(x),\text{ para todo } x$$

em que A e B são os mesmos limites trigonométricos fundamentais. Vamos calculá-los com o auxílio da representação na Figura 1.

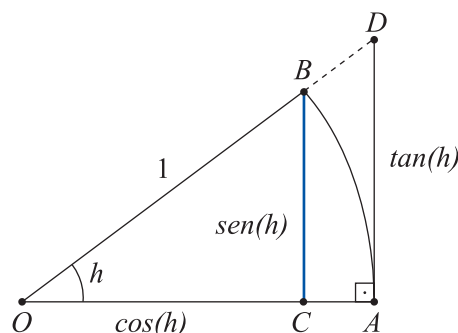



Figura 1 - O setor do círculo unitário definido pelo ângulo h e os segmentos $\overline{OC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$, cujos comprimentos são, respectivamente, $cos(h)$, $sen(h)$ e $tan(h)$

Podemos ver na Figura 1 que a área do triângulo *COB* é menor do que a área do setor *AOB* e que esta, por sua vez, é menor do que a área do triângulo *AOD*. Essas três áreas[2] são, respectivamente, $\dfrac{cos(h)sen(h)}{2}$, $\dfrac{h}{2}$ e $\dfrac{tan(h)}{2}$. Portanto, uma vez que $tan(h)=\dfrac{sen(h)}{cos(h)}$, as desigualdades envolvendo as três áreas em questão se expressam por

$$\frac{cos(h)sen(h)}{2}<\frac{h}{2}<\frac{sen(h)}{2\,cos(h)}.$$

[2] Você se lembra que a área de um setor circular de raio r definida por um ângulo de θ é $S=\dfrac{\theta\, r^2}{2}$?

Observe que estamos supondo h positivo e próximo do valor zero, o que nos garante que os valores $cos(h)$, $sen(h)$ e $tan(h)$ são todos positivos. Assim sendo, ao multiplicarmos as duas desigualdades acima por $\frac{2}{sen(h)}$ encontramos

$$cos(h) < \frac{h}{sen(h)} < \frac{1}{cos(h)}$$

e, invertendo cada uma dessas últimas desigualdades, isoladamente, chegamos à seguinte estimativa para $\frac{sen(h)}{h}$:

$$cos(h) < \frac{sen(h)}{h} < \frac{1}{cos(h)},$$

válida, até agora, para $h > 0$ e próximo de zero.

Para valores negativos de h, mas ainda próximos de zero, temos $-h > 0$ e daí $cos(-h) < \frac{sen(-h)}{-h} < \frac{1}{cos(-h)}$.

Mas, como $cos(-h) = cos(h)$ e $\frac{sen(-h)}{(-h)} = \frac{-sen(h)}{-h} = \frac{sen(h)}{h}$, podemos estender a validade dessa desigualdade também para valores negativos de h (mas ainda próximos de zero). Isso significa que

$$\lim_{h\to 0} cos(h) \leq \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{cos(h)}.$$

Agora, da continuidade da função cosseno, segue que

$\lim_{h\to 0} \frac{1}{cos(h)} = \frac{1}{cos(0)} = 1$ e que $\lim_{h\to 0} cos(h) = cos(0) = 1$. Portanto, o Teorema do Confronto nos garante que $\lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} = 1$, pois

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{cos(h)}}_{\overset{\|}{1}} \leq \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \leq \underbrace{\lim_{h\to 0} cos(h)}_{\overset{\|}{1}}$$

Acabamos de concluir que a constante A anterior vale 1.

Para calcular o limite trigonométrico fundamental B, racionalizamos a expressão $\frac{\cos(h)-1}{h}$ e utilizamos a identidade trigonométrica $sen^2(h) + cos^2(h) = 1$ para escrever

$$\frac{cos(h)-1}{h} = \frac{(cos(h)-1)(cos(h)+1)}{h(cos(h)+1)} = \frac{cos^2(h)-1}{h(cos(h)+1)} = -\frac{sen^2(h)}{h(cos(h)+1)} = -\frac{sen(h)}{h}\frac{sen(h)}{cos(h)+1}.$$

Por fim, a continuidade das funções seno e cosseno nos dá

$$B = \lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h} = \left(-\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{cos(h)+1}\right) = (-1)\times\left(\frac{sen(0)}{cos(0)+1}\right) = 0.$$

Agora, substituindo os valores $A = 1$ e $B = 0$ nas expressões das derivadas de $sen(x)$ e de $cos(x)$ encontramos

$$\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)$$

A derivada da função tangente $y = tan\,x = \dfrac{senx}{cos\,x}$ é facilmente obtida da regra do quociente e das derivadas das funções seno e cosseno:

$$\frac{d}{dx}tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) = \frac{cos(x)\frac{d}{dx}sen(x) - sen(x)\frac{d}{dx}cos(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{cos(x)\,cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{cos^2(x)} = \left(\frac{1}{cos(x)}\right)^2 = sec^2(x).$$

A seguinte proposição é a formalização do que demonstramos.

2.1 Proposição

As derivadas das funções trigonométricas $y = senx$, $y = cos\,x$ e $y = tan\,x$ são, respectivamente,

$$\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x) \qquad \frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x) \qquad \frac{d}{dx}tan(x) = \sec^2(x)$$

Lembre-se de que $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)}$, $csc(x) = \dfrac{1}{sen(x)}$ e $cot(x) = \dfrac{1}{tan(x)}$.

Suas derivadas, deixadas como exercício ao final desta aula, estão enunciadas na Proposição a seguir. Podem ser calculadas usando regras[3] propostas na Aula 7, reescrevendo as funções como $sec(x) = \dfrac{1}{cos(x)} = (cos(x))^{-1}$, $csc(x) = \dfrac{1}{sen(x)} = (sen(x))^{-1}$ e $cot(x) = \dfrac{1}{tan(x)} = (tan(x))^{-1}$.

[3] Ver Aula 7, última regra em Resumo das Regras de Derivação.

2.2 Proposição
As derivadas das funções trigonométricas $y = sec\,(x)$, $y = csc\,(x)$ e $y = cot\,(x)$ são, respectivamente,

$$\frac{d}{dx} sec(x) = sec(x) tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} csc(x) = -csc(x) cot(x)$$

$$\frac{d}{dx} cot(x) = -csc^2(x)$$

2.3 Exemplo

A derivada da função $y = tan^2(x) + 3sen(x)cos(x)$ é

$$\begin{aligned} y' &= 2\,tan(x)\frac{d}{dx}tan(x) + 3\left[\left(\frac{d}{dx}sen(x)\right)cos(x) + sen(x)\left(\frac{d}{dx}cos(x)\right)\right] \\ &= 2\,tan(x)sec^2(x) + 3[cos(x)cos(x) + sen(x)(-sen(x))] \\ &= 2\,tan(x)sec^2(x) + 3cos^2(x) - 3sen^2(x) \end{aligned}$$

2.4 Exercício resolvido

Encontre os valores de x para os quais a reta tangente ao gráfico da função $y = sen(2x)$ no ponto de abscissa x é horizontal.

Resolução: Lembrando que $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2\left[\left(\frac{d}{dx}sen(x)\right)\cos(x) + sen(x)\left(\frac{d}{dx}cos(x)\right)\right] \\ &= 2[cos(x)cos(x) + sen(x)(-sen(x))] = 2[cos^2(x) - sen^2(x)] = 2cos(2x). \end{aligned}$$

Utilizamos a propriedade $cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$, a qual, com $a = b$, se reduz a $cos(2a) = cos^2(a) - sen^2(a)$.

Os pontos pedidos são aqueles em que $\frac{dy}{dx} = 0$. Portanto, devemos resolver a equação $2cos(2x) = 0$. Como sabemos, a função cosseno se anula somente nos múltiplos inteiros ímpares de $\frac{\pi}{2}$. Portanto, os valores de x procurados são aqueles que satisfazem $2x = \frac{n\pi}{2}$, sendo n um inteiro ímpar qualquer. A solução é, portanto, $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \cdots\right\}$.

3. DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

No livro *Introdução ao estudo das funções*, a função exponencial foi apresentada e um destaque especial foi dado à função $y = e^x$, a exponencial de base *e*. Lá você foi informado de que o número *e* é irracional e que seu valor é aproximadamente 2,7182.[4]

Além disso, você pôde perceber que a exponencial de base *e* é, de certa forma, universal, pois praticamente todas as calculadoras possuem uma tecla para avaliação dessa função. Uma razão para tal fato é que qualquer outra exponencial da forma $y = a^x$ pode ser escrita na base *e*, uma vez que $a^x = e^{kx}$ para $k = ln(a)$.

Entretanto, uma caracterização geométrica do número *e* (existem várias outras caracterizações equivalentes) é a seguinte: o número positivo *e* é tal que a reta tangente ao gráfico da função exponencial $y = e^x$ no ponto *(0,1)* é $m = 1$. Veja a representação na Figura 2.

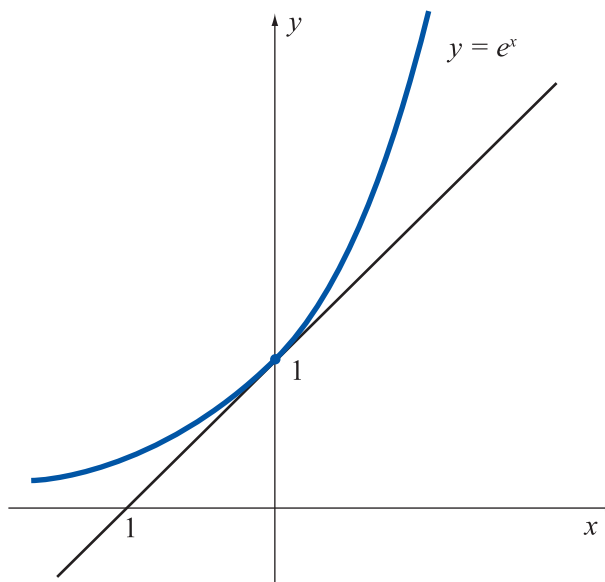



Figura 2 - A função exponencial $f(x) = e^x$ e a propriedade característica de sua base e : a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ no ponto $(0,1)$ é 1, isto é, $f'(0) = 1$

Mas a inclinação da reta tangente à função $y = e^x$ no ponto *(0,1)* é a derivada dessa função em $x = 0$. Daí segue outra caracterização do número *e*: aquele tal que[5]

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Essa caracterização do número e, que não é simples de ser deduzida, faz com que a derivada da exponencial de base *e* coincida com a própria função, isto é, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$. De fato, ao desenvolvermos a taxa de variação média da função $y = e^x$, encontramos

[4] Com 15 casas decimais, e = 2,718281828459045....

[5] Pois $1 = m = \frac{d}{dx}\left(e^x\right)\Big|_{x=0}$ e

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)\Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{x+\Delta x}-e^{x}}{\Delta x}=\frac{e^{x}e^{\Delta x}-e^{x}}{\Delta x}=e^{x}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$$

e, como $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, encontramos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[e^{x}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)\right]=e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=e^{x}$$

Como $a^x = e^{kx}$ para $k=ln(a)$, essa propriedade da função exponencial de base e, qual seja $\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$, nos permite calcular a derivada da função exponencial de base a ($y=a^{x}$).

Realmente, utilizando a regra de derivação de potência de uma função, isto é, $\frac{d}{dx}[u(x)]^{k}=k[u(x)]^{k-1}\left(\frac{d}{dx}u(x)\right)$ para $u(x)=e^{x}$, encontramos

$$\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{kx}\right)=\frac{d}{dx}\left[\left(e^{x}\right)^{k}\right]=k\left(e^{x}\right)^{k-1}\left(\frac{d}{dx}e^{x}\right)=k\left(e^{x}\right)^{k-1}\left(e^{x}\right)=k\left(e^{x}\right)^{k}=ke^{kx}$$

em que $k=ln(a)$.

Os resultados de nossos cálculos estão formalizados na próxima Proposição (você deve se lembrar que $ln(e)=1$).

3.1 Proposição

A função $y=a^{x}$ tem derivada

$\frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=ln(a)\,a^{x}$ e, em particular, $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$

Exercícios resolvidos

a) Calcule a derivada da função $y=e^{x}cos(x)$.

Resolução:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{d}{dx}e^{x}\right)cos(x)+e^{x}\left(\frac{d}{dx}cos(x)\right)=e^{x}cos(x)+e^{x}\left(-sen(x)\right)=e^{x}\left(cos(x)-sen(x)\right).$$

b) Calcule a derivada da função $y=\frac{3^{x}}{x}$.

Resolução:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left(\frac{d}{dx}3^{x}\right)-3^{x}\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^{2}}=\frac{x\,ln(3)3^{x}-3^{x}.1}{x^{2}}=3^{x}\left(\frac{ln(3^{x})-1}{x^{2}}\right).$$

Aqui utilizamos a seguinte propriedade da função *ln*: $a\,ln(b) = ln(b^a)$.

c) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = xe^x$ no ponto de abscissa $x = 2$.

Resolução: Primeiro devemos calcular a função derivada e depois avaliá-la em $x = 2$. Dessa forma, encontraremos o valor m da inclinação (ou coeficiente angular) da reta pedida. De posse de m, como sabemos que a reta deve passar pelo ponto $(2,2e^2)$, chegaremos à equação da reta tangente na forma $\frac{y-2e^2}{x-2} = m$. Temos $\frac{dy}{dx} = 1.e^x + xe^x = e^x(1+x)$ e, daí, $m = e^2(1+2) = 3e^2$. Assim, a equação da reta tangente é $y - 2e^2 = 3e^2(x-2)$, ou seja, $y = 3e^2x - 4e^2$.

4. EXERCÍCIOS

1. Calcule $\frac{dy}{dx}$ para:

a) $y = \frac{sen^2(x)}{\cos(x)}$

b) $y = cos(x) + tan(x)$

c) $y = sen(2x)$

d) $y = (sen(x) + cos(x))^{32}$

e) $y = sen(2x+5)$

f) $y = cos(2x)$

Sugestões: use as identidades trigonométricas $sen(2x) = 2senx\,cos\,x$, $y = sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$ e $y = cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$.

2. Encontre um ponto (a,b) do gráfico da função $y = sen(x)$ cuja reta tangente tenha inclinação $m = \frac{1}{2}$. Existe algum ponto do gráfico cuja reta tangente tenha inclinação maior do que *1*? E menor do que *-1*? Justifique.

3. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = tan(x)$ no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{3}$.

4. Lembrando que $csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$, $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$ e $cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$, encontre as derivadas dessas funções, isto é, verifique a Proposição 2.2.

5. Utilize o conceito de taxa de variação instantânea para verificar que

$$\frac{d}{dx}cos(x) = B\,cos(x) - A\,sen(x),$$ para todo x,

onde A e B são os limites trigonométricos fundamentais, isto é,

$$A = \lim_{h\to 0}\left(\frac{sen(h)}{h}\right) \text{ e } B = \lim_{h\to 0}\left(\frac{cos(h)-1}{h}\right).$$

6. Encontre os valores de x para os quais $\frac{dy}{dx} = 0$, se:

a) $y = x^2 e^x$

b) $y = e^{2x} - e^x + 30.$

7. Calcule a derivada da função y dada:

a) $y = e^{2x+3}$

b) $y = \frac{2^x}{x}$

c) $y = \left(e^x\right)^2$

d) $y = x\left(3^{2x}\right)$

AULA 9

A Regra da Cadeia

OBJETIVOS
Introduzir a Regra da Cadeia, explorando exemplos para sugerir seu enunciado. Aplicar a regra enunciada em exemplos diversos, garantindo a familiarização com seu uso. Estender a Regra da Cadeia para a composição de um número qualquer de funções.

1. INTRODUÇÃO

Já estudamos funções que se expressam por meio da composição de expressões de funções já conhecidas. Aqui vamos aprender a derivá-las. Muitas vezes podemos obter sua derivada reescrevendo-as; mas o esforço devido a manipulações algébricas que serão necessárias justifica o desenvolvimento de um método mais direto, conhecido como Regra da Cadeia.

Esta aula é dedicada ao estudo dessa regra e estrutura-se em três momentos. Primeiro, exploramos exemplos para percebermos a necessidade de estender as regras de derivação conhecidas até aqui. Em seguida, enunciamos o resultado central, finalizando com a análise de exemplos.

Vocês verão que, na Aula 7, já deduzimos alguns resultados que envolvem a Regra da Cadeia.

2. EXEMPLO: MOVIMENTO HARMÔNICO[1]

Iniciamos esta aula com o exame do movimento harmônico descrito por $y = sen(x)$, comparando-o com outro, descrito por $y = sen(2x)$. Um ciclo da função, no primeiro caso, estaria completo para uma variação de x em $[0,2\pi]$. No segundo caso, um ciclo se completa em $[0,\pi]$, um intervalo com exatamente a metade do comprimento do primeiro.[2]

[1] Vibrações, oscilações, ondas e movimentos periódicos em geral constituem uma parte importante do conhecimento científico. Aparecem em contextos diversos, desde o estudo do som ao estudo da estrutura atômica de cristais. Muitos desses processos são modelados por funções do tipo $y = asen(bt + c)$, onde a, b e c são números reais, constantes. Recebem o nome de *movimento harmônico simples*.

[2] Tais diferenças são expressas por noções, denominadas *período* e *frequência*. O *período* T é dado por $T = \frac{2\pi}{a}$ e corresponde ao tempo exigido para a realização de um ciclo completo da função, identificando o ângulo em radianos com medida de tempo t. Se t é medido em segundo, o número f de ciclos por segundo, denominado *frequência*, satisfaz $f.T = 1$. Observe que ambas as medidas são diferentes nos exemplos estudados; o que significa que as taxas de variação das funções são distintas!

Isso quer dizer que uma mesma variação Δx em um ponto x_0 corresponde a valores diferentes de Δy, em cada uma das funções. Em outras palavras, a taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de cada uma das funções em um mesmo intervalo é diferente. Portanto, não há como afirmar que os valores da taxa de variação instantânea ou derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ são iguais em ambos os casos. Na verdade, tudo indica que eles são mesmo distintos.

Essa discussão se confirma escrevendo $sen(2x) = 2senx\cos x$. Então: $\frac{d}{dx}sen(2x) = \frac{d}{dx}(2senx\cos x)$. Resolvendo a derivada na expressão à esquerda do sinal de igualdade pela regra do produto, e utilizando uma identidade trigonométrica adequada, chegamos a $\frac{d}{dx}sen(2x) = 2\cos(2x)$. Confirme esse resultado!

Compare o resultado com $\frac{d}{dx}senx = \cos x$, identificando semelhanças e diferenças.

Antes de explicarmos por completo o que está acontecendo em casos como esses, vamos estudar outros dois exemplos.

3. EXEMPLO: CONSUMO DE COMBUSTÍVEL

Em uma de suas viagens frequentes a São Paulo, Jussara percebeu que o marcador de gasolina não funcionava. Cuidadosa com o consumo de combustível por causa das distâncias aos postos de abastecimento nas estradas, fez estimativas, assumindo que o consumo C de gasolina depende da distância percorrida s, medida em quilômetros, que por sua vez depende da variável tempo t, medida em horas. Ela tinha conhecimento do desempenho de seu carro, que faz uma média de 10 *km* por litro de gasolina; de modo que uma estimativa aceitável para a derivada da função consumo C, em relação à variação da distância percorrida, seria $\frac{dC}{ds} = 0{,}10 litros/km$. Atenta ao velocímetro, procurava dirigir a uma velocidade média de 80 *km/h*, para tornar mais precisas as suas estimativas.

Você sabe como Jussara fez para saber qual é a taxa de consumo de gasolina em cada hora?

Refletindo sobre a situação, veja que, se multiplicarmos (consumo por quilômetro) × (número de quilômetros percorridos por hora), avaliamos

o consumo de gasolina por hora, uma taxa que podemos denominar $\frac{dC}{dt}$.

Numericamente, $\frac{dC}{dt} = (0{,}10 litros/km) \times (80 km/h) = 8 litros/hora$.

Em linguagem matemática, algébrica, representamos $C = C(s)$ e $s = s(t)$ e escrevemos a expressão:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

4. COMPARANDO TAXAS DE VARIAÇÃO

Seja a função $y = (2x^3 + 4)^2$. Podemos desenvolver o binômio e escrevê-la como $y = 4x^6 + 16x^3 + 16$. Sua derivada é fácil de encontrar e se escreve $\frac{dy}{dx} = 24x^5 + 48x^2$. Essa última pode ser reescrita como $\frac{dy}{dx} = 12x^2(2x^3 + 4)$. Há outros modos de reescrever a expressão, mas essa foi a escolhida porque a expressão entre parênteses é idêntica à expressão entre parênteses da função $y = (2x^3 + 4)^2$.

Para estabelecer as relações que têm importância nesta aula, vamos pensar a função $y = (2x^3 + 4)^2$ como composta de duas funções reais. Há modos de escrevê-la como composta de mais de duas funções, mas identificar sua expressão como composição de duas funções será suficiente para nosso propósito aqui. Para isso, pense na *última* ação (ou comando) que vamos executar para calcular $y = (2x^3 + 4)^2$ em um valor de x específico, utilizando uma calculadora. Por exemplo, em $x = 3$. Você concorda que o último comando será *elevar ao quadrado* (o valor resultante de $2.3^3 + 4$)? Escrevendo em linguagem matemática, representamos tal última ação por $y = u^2$, onde $u = 2x^3 + 4$.

Agora, calcule $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$. Veja que $\frac{dy}{du} = 2u$ e $\frac{du}{dx} = 6x^2$.

Relacionando a derivada $\frac{dy}{dx} = 12x^2(2x^3 + 4)$ com o produto $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$, vemos que são idênticas, após reordenarmos os fatores e fazermos $u = (2x^3 + 4)$. Em outras palavras, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Estamos prontos para enunciar a Regra da Cadeia.

5. ENUNCIADO DA REGRA DA CADEIA

5.1 Regra da Cadeia

Sejam f e g funções deriváveis, cuja composta $y = f(g(x))$ está definida.

Sua derivada $\frac{dy}{dx} = (f \circ g)'(x)$ se expressa em termos das derivadas de f e g como

$$\frac{dy}{dx} = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Traduzindo em palavras, informalmente, a derivada da composta de duas funções é a derivada da função (ou comando, ação) externa vezes a derivada da função interna.

5.2 Notação e linguagem

Em notação devida a Leibniz, escrevemos $y = f(u)$ e $u = g(x)$ e $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$, com $\frac{dy}{du}$ calculada em $u = g(x)$.

Essa foi a linguagem que utilizamos nos três exemplos que introduziram esta aula. Embora a Regra da Cadeia tenha sido enunciada utilizando outra notação, os exemplos nesta aula sinalizam a preferência pela notação de Leibniz.

6. UTILIZANDO A REGRA DA CADEIA

Procure resolver os exemplos seguintes pela Regra da Cadeia, antes de estudar a solução proposta! Um dos obstáculos para utilizarmos a regra parece ser o de expressar adequadamente a função que queremos derivar como composta de outras duas. Por isso, inicie sempre analisando como escrever a função a ser derivada em dois comandos ou funções, que você já sabe derivar pelas regras de derivação estabelecidas.

6.1 Exemplo

Calcule a derivada da função $y = sen(x^2 + 1)$.

Solução

Como sugerimos, ensaie a simulação: identifique o último comando

para calcular o valor y dessa função num ponto x específico, utilizando uma calculadora.

Você concorda que o comando seria "digitar a tecla seno" (do valor resultante de (x^2+1) para um ponto específico)?

Então, escreva:[3] $y = sen u$, onde $u = x^2 + 1$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (cos u) . (2x)$. A resposta final deve ser expressa em termos de x; e então

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos(x^2+1)$$

6.2 Exemplo

Encontre a derivada de $y = \sqrt[4]{(5x^3+e^x)}$, em seu domínio.

Solução

Primeiro, lembre-se que $\sqrt[4]{(5x^3+e^x)} = (5x^3+e^x)^{1/4}$. Depois, simule o cálculo do valor da função em um ponto, utilizando uma calculadora, e escreva:

$y = u^{1/4}$, com[4] $u = (5x^3+e^x)$.

Agora, derive a função, utilizando a regra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \tfrac{1}{4}u^{-3/4}.(15x^2+e^x).$$

Expressando a resposta em termos de x e usando propriedade de potências, escrevemos:

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{4}u^{-3/4}.(15x^2+e^x) = \tfrac{1}{4}(5x^3+e^x)^{-3/4}.(15x^2+e^x) = \frac{1}{4}\left(\frac{15x^2+e^x}{\sqrt[4]{(5x^3+e^x)^3}}\right).$$

6.3 Exemplo

Determinar y', para $y = (2x-1)^5\sqrt{senx}$, $x \in [0,\pi]$.

Solução

Veja que aqui temos que utilizar a regra do produto e a Regra da Cadeia:

$y' = ((2x-1)^5)'\sqrt{senx} + (2x-1)^5(\sqrt{senx})'$.

Então:

a) $y = (2x-1)^5$ se escreve como $y = u^5$, onde $u = (2x-1)$. Desse modo, $y' = 5u^4.2 = 10(2x-1)^4$.

[3] Observe que identificamos duas funções, $f(x) = senx$ e $g(x) = x^2+1$, tais que $(f \circ g)(x) = sen\left(x^2+1\right)$. Compare com a Regra da Cadeia, como foi enunciada.

[4] Observe que escrevemos a função como a composta de duas outras: $y = f(x) = x^{1/4}$ e $y = g(x) = (5x^3+e^x)$.

b) $y = \sqrt{senx} = (senx)^{1/2}$ se escreve como $y = u^{1/2}$, com $u = senx$.

$$y' = \tfrac{1}{2}u^{-1/2}.cos\,x = \tfrac{1}{2}(senx)^{-1/2}.cos\,x = \frac{cos\,x}{2(senx)^{1/2}}.$$

Assim, pela regra do produto, a resposta é:

$$y' = 10(2x-1)^4\sqrt{senx} + (2x-1)^5\frac{cos\,x}{2\sqrt{senx}}$$

$$= \frac{10(2x-1)^4\sqrt{senx} + (2x-1)^5 cos\,x}{2\sqrt{senx}} = \frac{(2x-1)^4\left[10senx + (2x-1)cos\,x\right]}{2\sqrt{senx}}.$$

Após aplicarmos a Regra da Cadeia, bem como outras regras de derivação, é importante simplificarmos as expressões obtidas. Vamos fazer esse treino desde já, embora sua importância fique mais clara nas próximas aulas.

6.4 Exemplo

Calcular a derivada de $y = \dfrac{1}{tan\,x}$.

Solução

Podemos resolver este exemplo pela regra do quociente, mas, aqui, vamos reescrever a função como $y = (tan\,x)^{-1}$ e considerar $y = u^{-1}$, onde $u = tan\,x$.

Da Regra da Cadeia, escrevemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = -1.u^{-2}.\sec^2 x = -(tan\,x)^{-2}.\sec^2 x.$$

Veja como fica o resultado da derivada, se o reescrevemos utilizando as identidades trigonométricas:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(tan\,x)^2}.sec^2\,x = -\frac{1}{\left(\frac{senx}{cos\,x}\right)^2}.\frac{1}{cos^2\,x} = -\frac{cos^2\,x}{sen^2 x}.\frac{1}{cos^2\,x} = -\frac{1}{sen^2 x} = -cot^2\,x.$$

Observe que deduzimos a regra de derivação da função $y = \cot x$, uma vez que $\dfrac{1}{tan\,x} = cot\,x$.

6.5 Exemplo

Determine a inclinação da tangente à curva do gráfico de $y = e^{(2+x^2)}$, no ponto $x = 0$.

Solução

Para isso, devemos, primeiro, calcular a derivada y' da função. Escrevendo a função para utilizar a Regra da Cadeia, colocamos $y = e^u$,

onde $u = 2 + x^2$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u .2x = 2x\, e^{2+x^2}.$$

Calculando a derivada no ponto $x = 0$, temos:

$y'(0) = 2 \times 0 \times e^{2+0} = 0.$

Lembre-se que isso significa que a tangente ao gráfico da função no ponto $(0, e^2)$ é horizontal!

6.6 Exemplo

Mostre que o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $y = \frac{1}{(2-e^x)^3}$ é sempre positivo, para todo ponto x em seu domínio.

Solução

O coeficiente angular da tangente corresponde, em cada ponto, ao valor da derivada da função. A derivada da função $y = \frac{1}{(2-e^x)^3}$ pode ser obtida pela Regra da Cadeia, escrevendo $y = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$, onde $u = (2 - e^x)$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-4} \cdot (-e^x) = \frac{3e^x}{u^4} = \frac{3e^x}{(2-e^x)^4}.$$

Veja que numerador e denominador dessa função são positivos: a função $y = e^x$ é sempre positiva, e a expressão no denominador, sendo uma potência par, será sempre positiva. Segue que o quociente de funções que representa $\frac{dy}{dx}$ é sempre positivo.

6.7 Exemplo

Um balão esférico está sendo inflado; nesse caso, seu raio r é função do tempo t.

Solução

A Regra da Cadeia nos dá condições de escrever a taxa de variação de seu volume, se conhecermos a taxa de variação de seu raio r. Veja como isso é feito:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ e } r = r(t).$$

Desse modo, pela Regra da Cadeia, sabemos que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ e, então,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

6.8 Exemplo

Calcular a derivada de $y = tan^2(5x)$.

Solução

Essa função apresenta uma dificuldade adicional, que pode ser facilmente contornada.

Simulando calcular a função num ponto, utilizando uma calculadora, o último comando será *elevar ao quadrado*. Ou seja, $y = u^2$, onde $u = tan(5x)$.

Se analisarmos atentamente essa última expressão $u(x)$, vemos que ela, por sua vez, é a composta de outras duas funções: $u = tant$, onde $t = 5x$.

Para prosseguirmos aplicando a Regra da Cadeia para derivar $y = tan^2(5x)$, vamos deixar indicada a derivada de $u = tan(5x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u.(tan(5x))' .$$

Feito isso, vamos nos ocupar com o cálculo de $\frac{du}{dx} = (tan(5x))'$, que será realizado identificando $u = \tan t$, onde $t = 5x$, e aplicando novamente a mesma Regra da Cadeia:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (sec^2 t).5 .$$

Substituindo na expressão final e escrevendo em termos de x, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = 2u \times (sec^2 t).5 = 10\, tan(5x).sec^2(5x).$$

6.9 Exemplo

Vamos retomar o exemplo anterior, buscando uma síntese de seu desenvolvimento.

A função $y = tan^2(5x)$ se decompõe nos seguintes comandos:

$y = u^2$, $u = tant$, $t = 5x$ e a Regra da Cadeia, neste caso, se escreveu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \left(\frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Vários comentários interessantes podem ser feitos. Dentre eles, observe como Leibniz concebeu sua notação, projetando um modo de operar com ela, como operamos com as frações. Veja como podemos "cancelar" numeradores e denominadores intermediários em

$\frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$ e $\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$, obtendo $\frac{dy}{dx}$.

Isso sugere uma generalização da Regra da Cadeia, que, por mais incrível que pareça, é mesmo possível! Veja a seguir.

Sejam, por exemplo, $y = u(t)$, $t = s(v)$, $v = m(x)$, todas deriváveis em um intervalo *I*. Então, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{ds}.\frac{ds}{dv}.\frac{dv}{dm}.\frac{dm}{dx}$. Cancele numerador e denominador intermediários em $\frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{ds}.\frac{ds}{dv}.\frac{dv}{dm}.\frac{dm}{dx}$, e veja que você obtém exatamente $\frac{dy}{dx}$.

Na verdade, o que fizemos para induzir a expressão do exemplo anterior a partir da Regra da Cadeia é uma estratégia recorrente na construção do conhecimento matemático:

- nós temos estabelecida a Regra da Cadeia para a composição de duas funções, $f \circ g$.
- se nos propusermos a derivar a composta de três funções $f \circ g \circ h$, reescrevemos a expressão como a seguir: $f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Nessa reescrita, $f \circ g \circ h = f \circ H$, onde $H = g \circ h$. Visto assim, fazemos recair a composição de três funções em duas expressões que envolvem a composição de duas funções, para as quais a regra conhecida se aplica.

7. EXERCÍCIOS

1. Encontrar $\frac{dy}{dx}$, pela Regra da Cadeia:

a) $y = cos(5x)$ b) $y = sen^3 x$ c) $y = e^{senx+1}$

d) $y = \frac{x}{(x^2+4)^{10}}$ e) $y = \frac{3x-1}{\sqrt{5x^2+7}}$ f) $y = \left(\frac{5x+12}{2x-1}\right)^4$

g) $y = (2x^3 - 2x)^{-2/5}$ h) $y = sec(1-x)^2$

2. Encontrar a equação da reta tangente à curva do gráfico da função, no ponto indicado:

a) $y = x^2 - sen(3x-1)$, no ponto $P = (0, sen1)$

b) $y = \sqrt{x^4+1}$, no ponto $P = (1, \sqrt{2})$

c) $y = xe^{-x^2}$, no ponto $P = (0,0)$

3. Encontre os pontos no gráfico de $f(x) = 2senx - sen^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

4. Calcular a derivada de $y = \sqrt{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

8. REFERÊNCIAS

FINNEY, R.; WEIR, M.; GIORDANO, F. *Cálculo*: George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley.

HUGHES-HALLETT, D. *et al. Cálculo e aplicações.* Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

SWOKOVSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1991. v. 1.

AULA 10

Diferenciais e derivadas de funções implícitas

OBJETIVOS
Apresentar a noção de diferencial e trabalhar a ideia de linearização de funções. Definir funções implícitas e derivação implícita. Usar a noção de diferencial para linearizar funções implícitas.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula vamos desenvolver duas noções importantes: a de linearização de funções e a de derivada de funções cuja lei explícita não é conhecida.

Para a primeira ideia, retomamos o fato de que, se uma função $y = f(x)$ admite derivada em um ponto $x = x_0$, a reta tangente ao gráfico naquele ponto quase coincide com o gráfico da função, localmente. Vamos interpretar essa representação em termos das expressões algébricas de $y = f(x)$ e da reta tangente.

Quanto à segunda ideia, vamos passar a trabalhar com relações entre variáveis (que representam funções) expressas implicitamente,[1] isto é, escondidas, em uma equação na forma $F(x, y) = 0$. Vamos aprender a derivar funções sem conhecer a expressão explícita da relação entre suas variáveis. Retomando a primeira ideia desta aula, vamos também discutir a importância desse procedimento e a razão pela qual derivar possibilita linearizar a função.

2. DIFERENCIAIS

A Figura 1 sugere que, para pontos muito próximos de $x = x_0$, a equação da reta pode substituir a equação da função em termos de cálculo de seus valores.

[1] Até este momento, as funções que estudamos são descritas por expressões nas quais uma das variáveis está explícita em termos da outra, na forma $y = f(x)$.

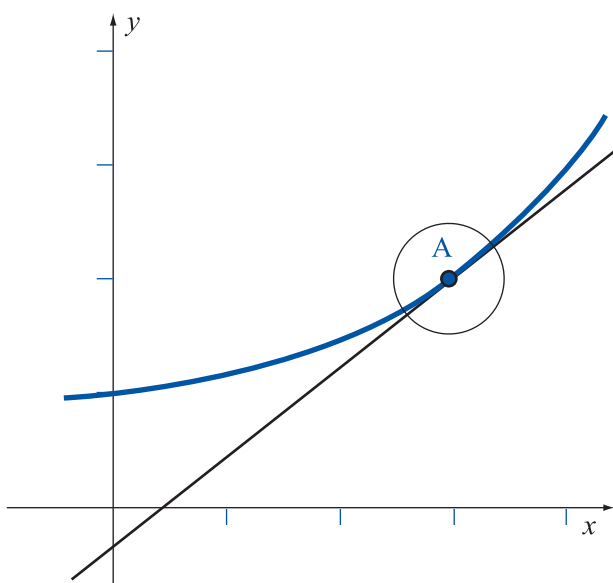



Figura 1 - Gráfico de $y = f(x)$ e reta tangente ao gráfico em um ponto A

O exemplo a seguir é um caso específico do procedimento sugerido por essa observação.

2.1 Exemplo: estimativas para a raiz quadrada

Podemos estimar valores para a raiz quadrada de um número próximo ao ponto $x = 1$, determinando a equação de sua reta tangente nesse ponto e utilizando-a para calculá-los,[2] ao invés de utilizarmos a expressão $y = \sqrt{x}$.

A equação da reta tangente[3] a $y = f(x) = \sqrt{x}$ em $(1,1)$ é

$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$; ou seja, $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$.

Observe o aspecto visual dos gráficos de $y = \sqrt{x}$ e de $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$, na Figura 2.

Ele sugere que o valor da raiz quadrada de um número real próximo de $x = 1$, por exemplo, de $\sqrt{1{,}01}$, pode ser estimado substituindo a equação da função $y = \sqrt{x}$ por $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$.

Ou seja, escrevendo

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1).$$

Assim,[4] $\sqrt{1{,}01} \approx 1 + \frac{1}{2}(1{,}01 - 1) = 1 + \frac{1}{2}0{,}01 = 1{,}005.$

[2] Como vimos (na verdade, assumimos), $y = \sqrt{x}$ possui derivada para todo $x > 0$, admitindo reta tangente em todos esses pontos. Vale observar que essa fórmula será também deduzida a partir de resultados da nossa próxima aula.

[3] Lembre-se de que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ e $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{1}{2}$, e confirme que a expressão da reta tangente é $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$!

[4] Ainda na Figura 2, observe, na representação do comprimento calculado, o “erro” que com certeza foi cometido, na estimativa por excesso que foi feita.

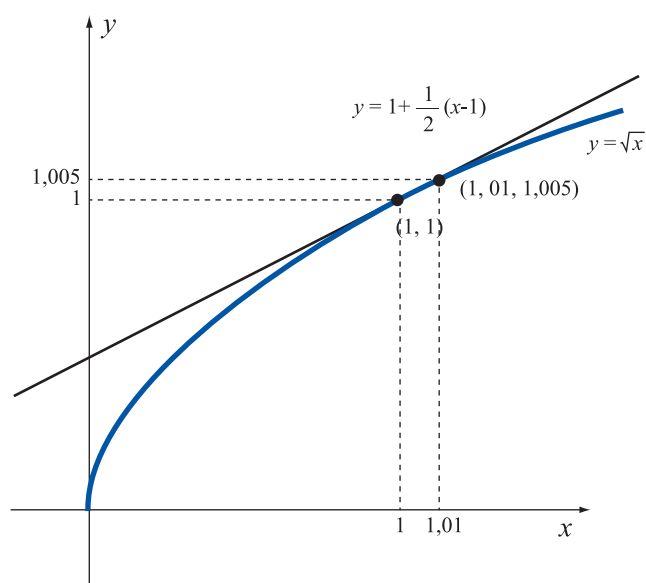



Figura 2 - Gráfico de $y = \sqrt{x}$ e reta tangente ao gráfico no ponto $(1,1)$

2.2 Estimativas para valores de $y = f(x)$

Imitando a estratégia desenvolvida em 2.1, mas agora para uma função qualquer $y = f(x)$ que admite derivada $f'(x_0)$, escrevemos:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

e utilizamos a expressão linear para calcular valores de $y = f(x)$ próximos de $x = x_0$.

Explore na Figura 3 o que estamos propondo fazer.

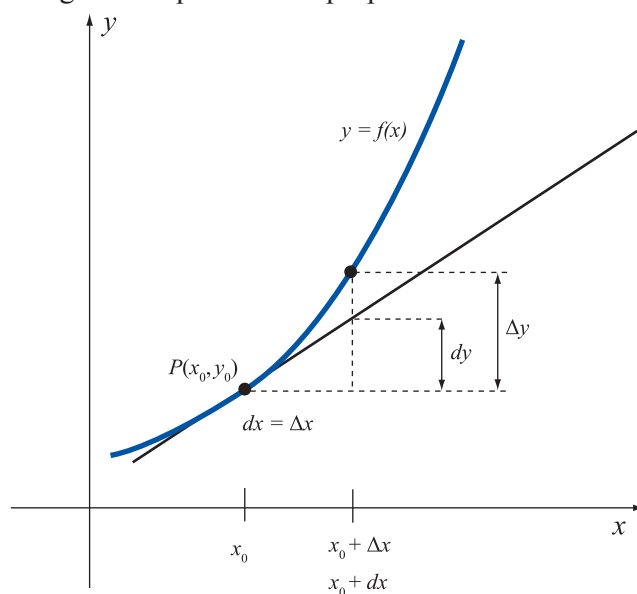



Figura 3 - Diferenciais e linearização de funções

A Figura 3 representa uma ideia importante: a de linearizar uma função localmente, ou seja, próximo a um ponto onde ela admite derivada. A proposta é substituir a expressão de uma função $y = f(x)$, que pode ser complicada ou desconhecida, por uma expressão algébrica linear, que é fácil de trabalhar. Observe os comprimentos dy e Δy, e $dx = \Delta x$. Eles serão importantes nesta discussão, pois vamos falar sobre eles mais adiante.

Como no exemplo 2.1, o exemplo 2.3 a seguir também faz uso da ideia de linearização, para estimar valores futuros de uma função cuja fórmula não é conhecida.

2.3 Exemplo: estimativa para a pressão atmosférica

A pressão atmosférica P decresce à medida que a altura h aumenta. A uma temperatura de 15ºC, a pressão é de 101,3 quilopascals (kPa) ao nível do mar, $87{,}1kPa$ a $h = 1km$ e $74{,}9kPa$ a $h = 2km$. Use uma aproximação linear para estimar a pressão atmosférica a uma altitude de $3km$.[5]

Solução

A expressão da função $P(h)$ não é conhecida, mas é uma boa hipótese supor, pela característica do fenômeno, que a função que a modela tem derivada.[6]

Vamos escolher o ponto $h = 2$ para desenvolver a questão porque esse é o ponto mais próximo de $h = 3$.

A derivada de $P(h)$ em $h = 2$ pode ser estimada[7] por

$$\frac{dP}{dh}(2) \approx \frac{P(2) - P(1)}{2-1} = \frac{74{,}9 - 87{,}1}{2-1} = \frac{-12{,}2}{1}.$$

A equação da reta[8] que passa por $(2, P(2))$ e tem inclinação $-12{,}2$ será $y - 74{,}9 = -12{,}2(x-2)$, ou seja, $y = 74{,}9 - 12{,}2(x-2)$.

Vamos utilizá-la para determinar $P(3)$:

$P(3) \approx y(3) = 74{,}9 - 12{,}2(3-2) = 62{,}7kPa$.

[5] Ver seção 3.11, exercício 2, em Stewart. *Cálculo*, p. 264.

[6] Você saberia dizer por quê?

[7] Este valor não é o da derivada, ou taxa de variação instantânea de $P(h)$ em $h = 2$. Representa, na verdade, a taxa de variação média de $P(h)$ no intervalo $[1,2]$.

[8] Na verdade, essa reta não é a reta tangente a $y = P(h)$ no ponto $(2, P(2))$, e sim a reta secante a $y = P(h)$ pelos pontos $(1, P(1))$ e $(2, P(2))$. Em relação aos dados disponíveis, representa a melhor estimativa possível.

2.4 Notação e linguagem

Retomando a expressão em 2.2

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

podemos reescrevê-la como $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$.

Observe que $f(x) - f(x_0)$ é a variação em y correspondente à variação $x - x_0$ em x.

Vamos utilizar notação estabelecida em aulas anteriores e escrever

$f(x) - f(x_0) = \Delta y$, ou $f(x) - f(x_0) = \Delta f$, e $x - x_0 = \Delta x$.

Ou seja, escrito nessa notação, temos assumido que

$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$.

A definição a seguir estabelece a noção que estamos discutindo.

2.5 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função que tem derivada em $x = x_0$. Chamamos *diferencial* de f em x_0 a expressão $f'(x_0)\Delta x$, simbolizando-a por $dy = f'(x_0)dx$.

Usando essa definição, não escrevemos por extenso a equação da reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ ao desenvolver o processo de estimar valores para $f(x_1)$. Uma vez conhecido o valor $f(x_0)$, escrevemos simplesmente:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + dy$$

2.6 Exemplo: uso de diferenciais

Usando diferenciais, vamos calcular $\sqrt[3]{26{,}9}$ escrevendo:[9]

$y(27) = \sqrt[3]{27} = 3$

$dx = \Delta x = 26{,}9 - 27 = -0{,}1$

$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ e, então, $y'(27) = \dfrac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{27}$.

Portanto, $dy = \dfrac{1}{27}\cdot -10^{-1} = -0{,}0\overline{37}$.

Assim, $\Delta y \approx dy \approx -0{,}037$ e

$\sqrt[3]{26{,}9} = f(27) + \Delta y \approx f(27) + dy = 3 - 0{,}037 = 2{,}963$.

Usando uma calculadora, calcule $(2{,}963)^3$ e verifique nossa estimativa!

[9] Vale observar que escolhemos o ponto $x = 27$, para desenvolver nossa estimativa, por ser um ponto em que calculamos o valor da função $y = \sqrt[3]{x}$ apenas com nosso conhecimento de potências cúbicas, e por ser próximo do ponto 26,9.

3. DERIVADAS DE FUNÇÕES IMPLÍCITAS

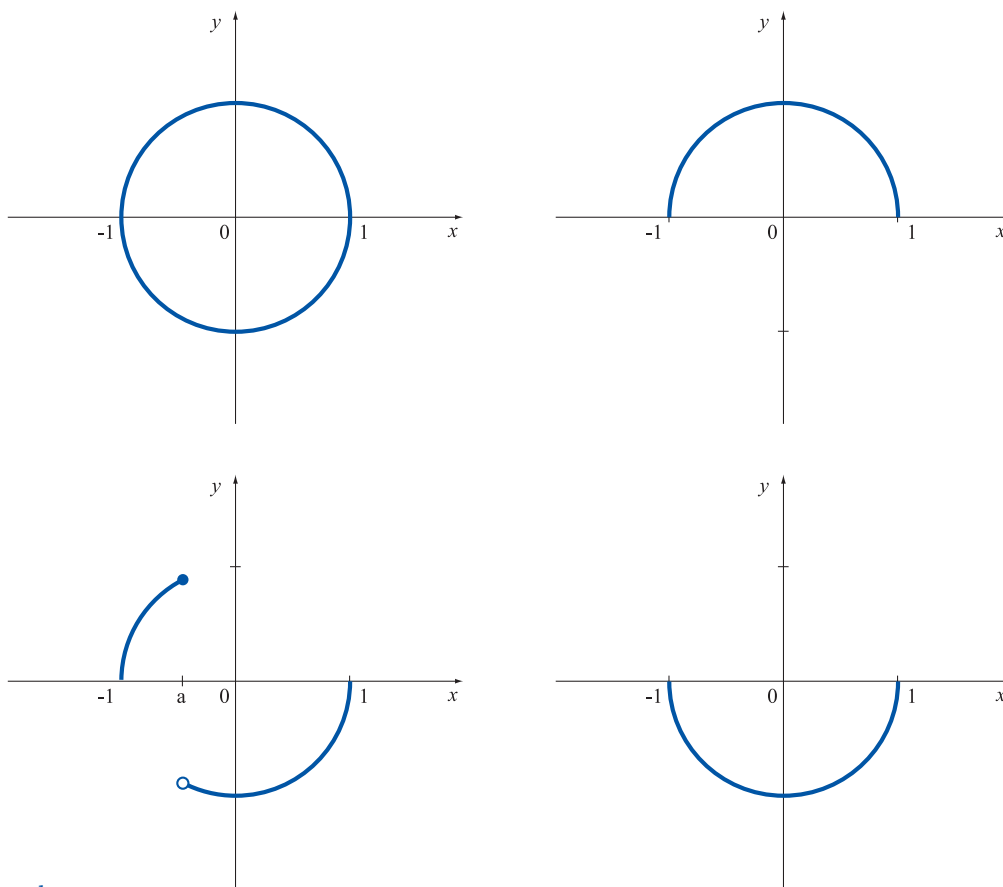
Iniciamos a discussão sobre essas funções com alguns exemplos.

3.1 Exemplo: $y = f(x)$ definida por $x^2 + y^2 = 1$

Na equação $x^2 + y^2 = 1$, ou $x^2 + y^2 - 1 = 0$, variações convenientes em x fazem corresponder variações em y. No caso dessa equação, cada valor numérico atribuído a x em $[-1,1]$ corresponde exatamente a dois valores de y.[10] Isso quer dizer que essa equação não define uma única $y = f(x)$. Nesse caso, ela define pelo menos duas:

$y = \sqrt{1-x^2}$ ou $y = -\sqrt{1-x^2}$

Explore nas figuras a seguir o gráfico da equação $x^2 + y^2 = 1$ e de algumas funções implícitas de x que podem ser definidas.

Figura 4 - A equação $x^2 + y^2 = 1$ e representações de algumas de suas funções implícitas

[10] Tente especificar valores para x e determine valores correspondentes a y, se existirem!

[11] Basta resolvermos a equação como uma equação do segundo grau em x: pense num valor especifico para x e resolva a equação!

3.2 Exemplo: $y = f(x)$ definida por $y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 = 0$

Para a equação $y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 = 0$, também é possível expressarmos a variável y como função de x, explicitamente.[11]

Assim, obteremos

$$y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 2x^2}}{2} = \frac{2x + \sqrt{2x^2}}{2} = \frac{2x + \sqrt{2}|x|}{2}$$

e

$$y = \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 2x^2}}{2} = \frac{2x - \sqrt{2x^2}}{2} = \frac{2x - \sqrt{2}|x|}{2}$$

3.3 Exemplo: $y = f(x)$ definida por $x^3 + y^3 = 2xy$

Veja a equação $x^3 + y^3 = 2xy$, representada na Figura 5. Aqui também é possível definirmos "recortes" ou "janelas" tais que a equação dada deixe explícita[12] a função $y = f(x)$.

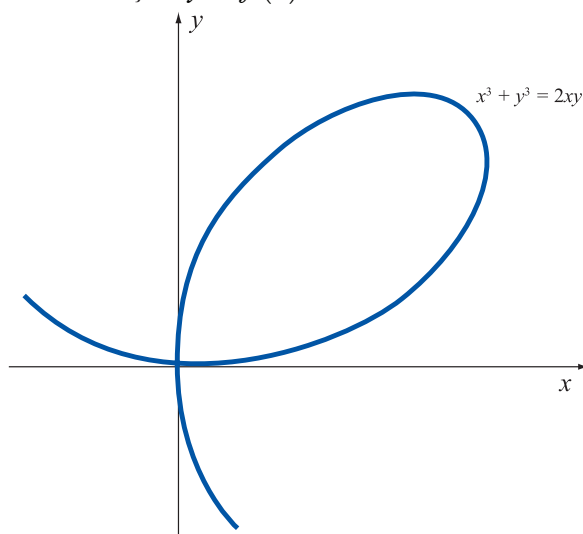



Figura 5 - Gráfico da equação $x^3 + y^3 = 2xy$

Apesar de ser visualmente simples exibirmos gráficos de funções recortando adequadamente o gráfico da equação dada, é trabalhoso, neste exemplo e em muitos outros casos, exibirmos a lei algébrica explícita[13] da função $y = f(x)$.

Em situações como essa, torna-se interessante a ideia de aproximarmos a lei da função pela lei da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = x_0$, como fizemos no início desta aula. Para isso, necessitamos da derivada em $x = x_0$ da função que está implícita. A proposta é determiná-la a partir da equação $F(x, y) = 0$, ou seja, sem conhecer a lei explícita da função $y = f(x)$.

Em síntese, vamos desenvolver uma técnica para derivar a função $y = f(x)$, definida implicitamente pela equação $F(x, y)=0$. A Regra da Cadeia será útil nesse caso.[14] Vamos explorar a estratégia de calcular as derivadas das funções do exemplo 3.1, sem obtermos a função na forma explícita.

[12] Quantas funções $y = f(x)$ você consegue perceber a partir do gráfico da equação neste caso?

[13] Em outras palavras, é difícil isolar y de um lado da igualdade e uma expansão envolvendo somente x do outro lado!

[14] O motivo deste trabalho pode ser justificado pelo que discutimos na seção 2: conhecendo a derivada de uma função num ponto, conhecemos a expressão de sua reta tangente, e podemos linearizar a expressão da função em estudo.

3.4 Exemplo: derivando $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$

A derivada de $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2 + y^2 - 1 = 0$ pode ser encontrada derivando, em relação a x, ambos os membros da igualdade:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2 - 1\right) = \frac{d}{dx}(0), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) + \frac{d}{dx}(-1) = \frac{d}{dx}(0).$$

Uma vez que $y = f(x)$, a Regra da Cadeia deve ser utilizada para calcularmos $\frac{d}{dx}\left(y^2\right)$.

Assim,[15]

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 0 = 0 \text{ e } \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}.$$

[15] Veja como a expressão da derivada está escrita, na forma implícita. Seu denominador está escrito em termos de y, uma função de x em que não explicitamos a regra algébrica. Mesmo neste caso em que as regras explícitas de $y = f(x)$ em $F(x, y) = 0$ são conhecidas, a expressão encontrada ao derivarmos implicitamente continua de interesse, uma vez que ela fornece a derivada para ambas as soluções explícitas, $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$. Basta substituirmos as expressões explícitas no denominador, no lugar de y. Verifique esse fato, derivando as expressões $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = -\sqrt{1-x^2}$ e comparando com a expressão que obtivemos.

3.5 Exemplo: derivando $y = f(x)$ definida implicitamente por $y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 = 0$

Derivando em relação a x ambos os membros da equação $y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 = 0$, como no exemplo anterior, escrevemos

$$\frac{d}{dx}\left(y^2 - 2xy + \tfrac{1}{2}x^2\right) = 0.$$

Observando $y = f(x)$ e as regras de derivação, encontramos

$$2y\frac{dy}{dx} - \left(2y + 2x\frac{dy}{dx}\right) + x = 0 \quad \text{e}$$

$$(2y - 2x)\frac{dy}{dx} = 2y - x. \text{ Portanto,[16] } \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2y - 2x}.$$

[16] Observe que a expressão obtida tem as mesmas características da expressão no exemplo anterior: seu denominador está escrito em termos de y, que é uma função de x cuja regra algébrica não explicitamos.

3.6 Exemplo: derivando $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^3 + y^3 = 2xy$

Ao derivar implicitamente $x^3 + y^3 = 2xy$ obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + y^3\right) = \frac{d}{dx}(2xy)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2y + 2x\frac{dy}{dx} \text{ e } \left(3y^2 - 2x\right)\frac{dy}{dx} = 2y - 3x^2 .$$

Assim, $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$.[17]

3.7 Exemplo: linearizando $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^3 + y^3 = 2xy$

Não é fácil explicitarmos $y = f(x)$ na equação $x^3 + y^3 = 2xy$ porque não é fácil resolvermos a equação do terceiro grau que resulta da especificação de valores de x. Utilizando diferencial e o conceito de linearização, podemos encontrar valores que satisfaçam a equação, próximos de valores conhecidos, sobre a curva.

Veja que o ponto $(1,1)$ satisfaz a equação da curva e está no domínio da expressão da derivada, calculada implicitamente.[18]

Assim, a função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação $x^3 + y^3 = 2xy$ pode ser aproximada pela equação $y - 1 = -1(x - 1)$, para valores de (x, y) próximos do ponto $(1,1)$. Essa última equação, linear, é a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, em $(1,1)$.

Então, escrevemos que $y = f(x) \approx 1 - 1(x - 1) = -x + 2$, para $y = f(x)$ próximo do ponto $(1,1)$, definida implicitamente por $x^3 + y^3 = 2xy$.

Veja na Figura 6 a representação do gráfico das funções mencionadas.

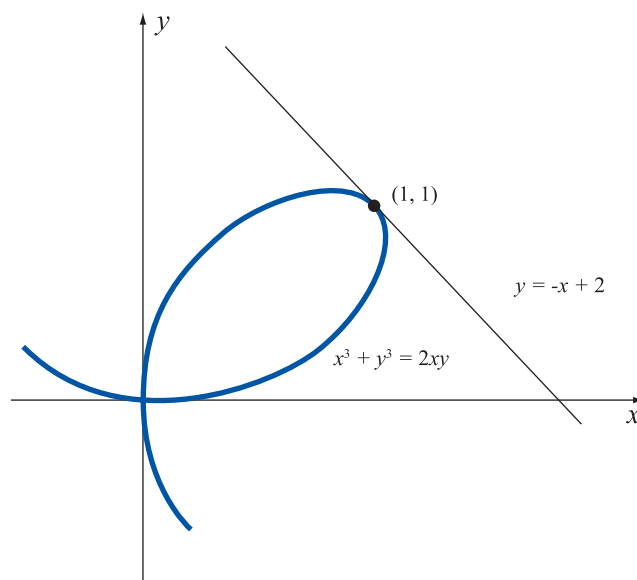



Figura 6 – A função definida implicitamente por $x^3 + y^3 = 2xy$

[17] Observe que $3y^2 - 6x$ deve ser diferente de zero, para que a derivada da função definida implicitamente por $x^3 + y^3 = 6xy$ exista.

[18] Você sabe verificar que o ponto (1,1) está sobre a curva?

Se quisermos encontrar, por exemplo, o ponto sobre a curva de abscissa 0,009, e ordenada próxima de 1, escrevemos

$y(0{,}009) = 2 - 0{,}009 = 1{,}991$.

4. EXERCÍCIOS

1. Escreva a expressão da diferencial de $y = \sqrt[3]{x}$, no ponto $(1{,}1)$.

2. Use diferenciais para estimar $\sqrt{24{,}9}$.

3. Para a função derivável $y = f(x)$ definida implicitamente, encontre $\frac{dy}{dx}$:

$cos^2 2y = 2x - y + 3 \qquad 5x^2 + 2x^2 y - y^2 = 8 \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

4. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ definida implicitamente por $xy + 8 = 0$ no ponto $P = (-2{,}4)$.

5. Mesmo enunciado de 4, para $(y-2)^2(x^2 + y^2) = 16y^2$, no ponto $P = (\sqrt{15}{,}1)$.

5. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

FINNEY, R.; WEIR, M.; GIORDANO, F. *Cálculo*: George B. Thomas. São Paulo: Addison Wesley.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância.)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. v. 1. São Paulo: Pioneira.v. 1.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1991.

AULA 11

Derivada da função inversa

OBJETIVOS
Deduzir a expressão da derivada da função inversa, utilizando a derivação implícita. Deduzir as regras de derivação das inversas da função exponencial e das funções trigonométricas.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos deduzir as regras de derivação para a função logarítmica e as três funções trigonométricas inversas – a arco seno, a arco cosseno e a arco tangente.

O processo de dedução das regras de derivação aqui é diferente dos que foram desenvolvidos para as demais funções elementares. Até agora, nosso ponto de partida foi sempre a definição de derivada.[1] Nesta aula, vamos utilizar a teoria já construída a partir das definições para demonstrar os resultados que anunciamos.

A teoria matemática se constrói desse modo. Assim, sem perda de rigor na construção do conhecimento, podemos lançar mão da derivação implícita, e consequentemente da Regra da Cadeia, estudadas em aulas anteriores, para estabelecer os resultados que anunciamos.[2]

A dedução da regra de derivação para as funções que vamos estudar reproduz a que será utilizada para escrever a derivada de funções inversas f^{-1} em termos da derivada de f. Dessa forma, as primeiras deduções são exemplos para definir, ao final desta aula, uma proposição estabelecendo a derivada da função inversa.

[1] A dedução das regras de derivação foi feita por meio do cálculo do limite do quociente que representa as taxas de variação média das funções em um ponto.

[2] Chamamos aqui a sua atenção para a importância da Regra da Cadeia neste desenvolvimento. Estude-a com bastante carinho!

2. EXEMPLO: A DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

A função logarítmica foi definida como inversa da função exponencial:

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

Utilizando a regra de derivação de funções exponenciais[3] e a estratégia da derivação implícita desenvolvida na aula anterior, encontramos $\frac{dy}{dx}$ derivando a equação $a^y = x$.

Para isso, seguimos o mesmo procedimento dos exemplos e exercícios propostos na Aula 10, escrevendo

$$\frac{d}{dx}\left(a^y\right) = \frac{d}{dx}(x)$$

e

$$a^y \ln a \frac{dy}{dx} = 1.$$ [4]

Segue que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a}$. Para escrever a expressão da derivada em termos de x, retomamos a definição

$y = \log_a x \iff a^y = x$

e estabelecemos a regra enunciada a seguir.

2.1 Proposição

A derivada de $y = \log_a x$ é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$.

A função logaritmo natural $y = \ln x$, com base $a = e$, tem a expressão da sua derivada simplificada. Podemos reescrevê-la

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$

e estabelecer a regra:

2.2 Proposição

A derivada de $y = \ln x$ é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Agora é só praticar. Nos exemplos a seguir, vamos utilizar a nova regra de derivação deduzida.

[3] A regra de derivação de funções exponenciais foi deduzida na Aula 8.

[4] Lembre-se da Regra da Cadeia, porque implicitamente y é uma função de x.

2.3 Exemplos: utilizando a nova regra de derivação

1. Derivar a função $y = e^x \ln x$.

Pela regra do produto, escrevemos

$$\frac{dy}{dx} = e^x \ln x + e^x . \frac{1}{x}$$

2. Derivar $y = \log_{10}(\sqrt{x})$.

Escrevendo $y = \log_{10} u$, e $u = \sqrt{x}$, usamos a Regra da Cadeia para escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln 10} . \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} \ln 10} = \frac{1}{2x \ln 10}.$$

3. Utilizar a Regra da Cadeia e derivar $y = \ln(\ln x)$, para $x > 1$.

Lembre-se de que $y = \ln(\ln x)$ se decompõe como $y = \ln u$, onde $u = \ln x$.

Segue que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{x}$ · Escrevendo em termos da variável x, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$$

4. Derivar $y = \ln(tan\, x)$.

Escrevendo $y = \ln u$, onde $u = tan\, x$, encontramos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} . sec^2 x = \frac{1}{(tan\, x).(sec^2 x)}$$

5. Encontrar a derivada de $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)$.

Antes de derivar, observe que $\ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-2x)$.

Escrever a expressão desse modo nos auxilia, porque vamos evitar a aplicação da regra do quociente[5] em $u = \frac{1+x}{1-2x}$.

Assim, reescrita,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x} . \frac{d}{dx}(1+x) - \frac{1}{1-2x} . \frac{d}{dx}(1-2x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} = \frac{3}{(1+x)(1-2x)}.$$

[5] Esse procedimento deve ser observado antes de iniciarmos manipulações algébricas e aplicações de regras. Muitas vezes é possível preparar o desenvolvimento reescrevendo as expressões, e poupar muito trabalho algébrico.

2.4 Exemplo: a derivada de $y = x^a$, onde a é um número real

Para estendermos a regra de derivação de potências naturais de x a expoentes reais, vamos reescrever a expressão $y = x^a$, em que $a \neq 0$ é um número real, de modo a utilizarmos procedimentos já conhecidos.

Iniciamos tomando o logaritmo em ambos os membros da igualdade[6]

$\ln y = \ln x^a$, ou seja, $\ln y = a \ln x$.

A relação entre as variáveis não é alterada, uma vez que as funções logarítmicas são injetivas.

Derivando essa última igualdade sem nos esquecermos de que y é uma função de x, chegamos a

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(a \ln x) \text{ e } \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}.$$

Então,

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}.y = \frac{a}{x}.x^a = ax^{a-1}$, como gostaríamos que fosse válido!

A partir de agora, temos suporte teórico para derivar qualquer potência de x. Vamos enunciar o resultado na proposição a seguir.

2.5 Proposição

A derivada de $y = x^a$, onde a é um número real, se escreve como

$$\frac{dy}{dx} = ax^{a-1}$$

onde for definida.

2.6 Exemplo: a derivada de $y = x^\pi$

Pela proposição 2.5, $y' = \pi x^{\pi-1}$.

3. EXEMPLO: DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Nós já definimos

$y = arcsenx$ se, e somente se, $x = seny$, com $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

$y = arccos(x)$ se, e somente se, $x = cos\ y$, para $0 \leq y \leq \pi$;

[6] Esse procedimento é chamado Derivação Logarítmica.

$y = arctanx \quad \Leftrightarrow \quad x = tan\, y$, para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Nesta aula, vamos aprender a derivar essas funções. A estratégia será semelhante à utilizada para derivar as funções logarítmicas.

3.1 A derivada de $y = arcsen(x)$

Retomando a relação $y = arcsenx \quad \Leftrightarrow \quad x = seny$, a derivação implícita nos permite escrever

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(seny).$$

Ou seja, $1 = (cos\, y).\frac{dy}{dx}$.

Isto quer dizer que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y}$

Uma vez que construímos a inversa para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, observe que os valores de $cosy$ serão positivos. Sendo $x = seny$, o domínio de $y = arcsenx$ será o intervalo $[-1,1]$.

Para reescrevermos a expressão $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y}$ em termos de x, devemos escrever $cosy$ em termos de $seny$. Utilizamos identidades trigonométricas; no caso, a identidade $cos^2 y + sen^2 y = 1$. A partir dela, podemos escrever $cos\, y = \sqrt{1 - sen^2 y}$. A escolha pela raiz quadrada positiva se deve ao fato de que $cos\, y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Assim, podemos afirmar:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Veja que essa derivada só existe no intervalo aberto $(-1,1)$.

Com essa conclusão, deduzimos a proposição a seguir.

3.1.1 Proposição

A função $y = arcsen(x)$, definida no intervalo fundamental em que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ e com domínio $-1 \leq x \leq 1$, tem derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $x \in (-1,1)$.

3.1.2 Exemplo: utilizando a nova regra para derivar $y = arcsen(x^2 + 3)$

Para derivar $y = arcsen(x^2 + 3)$, utilizamos a regra deduzida na proposição 3.1.1 e, naturalmente, a Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(arcsenu).\frac{d}{dx}(x^2 + 3).$$

Então, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.2x$.

Reescrevendo em termos da variável x , temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+3)^2}}.2x$$

3.2 A derivada de $y = arccos(x)$

Para obtermos a derivada de $y = arccos(x)$, trabalhamos do mesmo modo que em 3.1.

Primeiro, observamos que $y = arccos(x)$ se, e somente se, $x = cos\ y$, para $0 \le y \le \pi$.

Seu domínio será, como na discussão da função arco seno, em 3.1, restrito ao intervalo $[-1,1]$.

Derivando implicitamente a expressão $x = cos\ y$ chegamos a $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{seny}$. Da mesma identidade trigonométrica que utilizamos em 3.1 concluímos:

3.2.1 Proposição

A função $y = arccos(x)$, definida no intervalo fundamental em que $0 \le y \le \pi$ e com domínio $-1 \le x \le 1$, tem derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \in (-1,1)$.

3.2.2 Exemplo: utilizando a nova regra para derivar $y = arccos(sen4x)$

Para derivar a função $y = arccos(sen4x)$, vamos expressá-la como a composta de $y = arccos(u)$, onde $u = sen4x$. Observe que, por sua vez, $u = sen4x$ se escreve $u = senv$, onde $v = 4x$.

Assim, pela Regra da Cadeia,[7] $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.\cos v.4$.

Escrevendo em termos de x e reordenando os termos, obtemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-sen^2 4x}}.\cos 4x.4=\frac{-4\cos 4x}{\sqrt{1-sen^2 4x}}.$$

3.3 A derivada de $y = arctan(x)$.

Da definição, $y = arctan x \iff x = tan\, y$, para o intervalo fundamental $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.

Derivando implicitamente,

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(tan\, y)$$

e então

$$1=sec^2 y.\frac{dy}{dx}$$

Segue que $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{sec^2 y}$.

Uma vez que $x = tan\, y$, para reescrever a expressão em termos de x, retomamos a identidade $1 + tan^2 y = sec^2 y$, obtendo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+tan^2 y}$$

Esses cálculos deduzem a proposição a seguir.

3.3.1 Proposição

A derivada da função $y = arctan x$, definida em $(-\infty,+\infty)$ é dada por $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$.

3.3.2 Exemplo: utilizando a nova regra para resolver problemas.

Um balão é solto ao nível da visão de um observador, que está a 30 m de distância da base de lançamento. O observador acompanha a subida do balão movendo seu olhar.

Você sabe relacionar a velocidade $\frac{d\theta}{dt}$ com que o ângulo de visão θ está se modificando com a velocidade $\frac{dh}{dt}$ com que o balão sobe, se afastando do solo?

[7] Essa forma com que estamos desenvolvendo a Regra da Cadeia não precisa ser tão detalhada, quando você já estiver seguro de sua utilização.

Faça um desenho, identificamos que $tan\theta = \frac{h}{30}$. Assim, $\theta = arctan\left(\frac{h}{30}\right)$.

Para derivar a expressão em relação a t, usamos a Regra da Cadeia:
$\theta = arctan\, u$, $u = \frac{h}{30}$, $h = h(t)$.

Assim, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{dh}{dt}$. Ou seja, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{30}{900+h^2} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Veja que nessa questão a variação $\frac{dh}{dt}$ não foi informada. Por isto, a resposta à questão está expressa em função dessa variável.

4. A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

Do mesmo modo que as funções estudadas nos exemplos, a função f^{-1}, inversa de f, quando existe, é definida por

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$.

Em pontos onde f for derivável, podemos derivar implicitamente a equação $x = f(y)$, e escrever

$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(f(y))$ ou seja, $1 = f'(y) . \frac{dy}{dx}$.

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}, \text{ onde } y = f^{-1}(x).$$

Para que exista essa derivada, será necessário que $f'(y) \neq 0$. Sistematizamos esse resultado na proposição a seguir.

4.1 Proposição

Sejam f e f^{-1} funções inversas, e f derivável em um ponto a de seu domínio, com $f'(a) \neq 0$.

Então, $y = f^{-1}(x)$ é derivável no ponto $b = f(a)$ e

$\frac{dy}{dx}(b) = \frac{1}{f'(a)}$, onde $a = f^{-1}(b)$.

4.2 Notação e linguagem

Observe que a notação utilizada no enunciado da proposição não foi uniforme: junto com a notação de Leibniz, fizemos uso da notação f', para tornar mais concisa a expressão da derivada da função inversa.

Por outro lado, uma vez que $f(y)=x$, ao escrevermos $\frac{dx}{dy}$ ao invés de f', a equação que buscamos torna-se $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, com a derivada no denominador calculada em $y=y(x)$.

Novamente, observe como as notações de Leibniz parecem satisfazer regras válidas para operar com frações.

5. EXERCÍCIOS

1. Encontre as derivadas das seguintes funções

(a) $y = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$

(b) $y = x(arccosx)^2$

(c) $y = arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(d) $y = -\ln\sqrt{1+x^2}$

6. REFERÊNCIAS

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008 (Educação a Distância).

SIMMONS, G. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira. v. 1.

AULA 12

Taxas relacionadas

OBJETIVO
Mostrar, através de exemplos, como determinar uma taxa de variação de modo indireto, a partir de outra(s) taxa(s) que lhe são relacionadas, utilizando a Regra da Cadeia.

1. INTRODUÇÃO

Em alguns modelos matemáticos de situações ou fenômenos diversos, vinculamos grandezas por meio de equações e, a partir desse vínculo, desejamos saber como uma dessas grandezas varia em relação à(s) outra(s).

Muitas vezes, porém, essa informação não é acessível explícita ou diretamente a partir do modelo matemático ou das informações disponíveis que envolvem o modelo.

Nesta aula, vamos ilustrar, em algumas dessas situações, como podemos relacionar variáveis e lançar mão da Regra da Cadeia para obtermos, de modo indireto, as taxas de variação que desejamos.

2. EXEMPLOS DE PROBLEMAS SOBRE TAXAS RELACIONADAS

Problema 1. O lado de um quadrado aumenta à taxa constante de $5\ m/s$. Determine a taxa de variação da área desse quadrado no instante em que a medida de seu lado é $10\ m$.

Resolução. Se denotarmos o lado do quadrado por L e a sua área por A, então teremos $A = L^2$. De acordo com as informações que temos, o lado do quadrado e, portanto, também a sua área dependem também do

tempo t. Além disso, a taxa (velocidade) com que o lado está variando com o tempo é constante e, em metros por segundo, dada pelo valor 5. A tradução dessa informação é $\frac{dL}{dt} = 5$ (observe que ela indica que o lado do quadrado está aumentando com o tempo, pois a derivada de L em relação ao tempo é positiva).

Desejamos saber a taxa de variação (velocidade) instantânea da área do quadrado, no exato instante em que o seu lado mede $10\ m$. Isto é, se t^* é tal que $L(t^*) = 10$, então queremos encontrar o valor $A'(t^*)$ (ou, em outra notação, o valor $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=t^*}$). Poderíamos pensar em resolver esse problema da seguinte forma: encontramos a expressão $L(t)$ e o instante t^*. Em seguida, elevando $L(t)$ ao quadrado, encontramos $A(t)$ e, logo após, por derivação, encontramos $A'(t)$. Finalmente, calculamos o valor pedido $A'(t^*)$.

Mas, pensando melhor, como poderíamos encontrar $L(t)$ se não sabemos a medida do lado do quadrado no instante inicial ($t = 0$), isto é, o valor $L(0)$? É natural imaginarmos que $L(t) = L_0 + 5t$, uma função do primeiro grau, pois a taxa de crescimento de L com relação a t é constante ($5\ m/s$). Entretanto, em princípio, precisaríamos saber o valor de $L(0) = L_0$ para resolvermos a equação $L_0 + 5t = 10$, a qual nos daria o valor de $t^* = \frac{10 - L_0}{5} = 2 - \frac{L_0}{5}$.
Mesmo sem sabermos o valor de L_0, se prosseguíssemos com a nossa primeira ideia, encontraríamos $A(t) = (L_0 + 5t)^2 = L_0^2 + 10L_0t + 25t^2$, $A'(t) = 10L_0 + 50t$ e, por fim, $A'(t^*) = 10L_0 + 50\left(2 - \frac{L_0}{5}\right) = 100$. Assim, encontraríamos $100\, m^2/s$ para a taxa de variação da área com relação ao tempo, no instante em que o lado mede 10 m.

Agora, vejamos outra forma de resolvermos o problema, utilizando a Regra da Cadeia sem precisarmos encontrar o valor t^* (mas sabendo o que esse valor significa).

Sabemos que A é função de L e que L, por sua vez, é função de t. Dessa forma, como vimos acima, A também é função (composta) de t e, pela Regra da Cadeia, podemos derivar A em relação a t, da seguinte forma:

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dL}\frac{dL}{dt}$ (em que $\frac{dA}{dL}$ é a derivada de A em relação a L, avaliada em $L = L(t)$). Assim, sabendo que existe um valor t^* tal que[1] $\left(\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t=t^*}\right) = 10$, podemos calcular:

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=t^*} = \left(\left.\frac{dA}{dL}\right|_{L=10}\right)\left(\left.\frac{dL}{dt}\right|_{t=t^*}\right) = \left(2L|_{L=10}\right)5 = 20 \times 5 = 100.$$

[1] Estamos utilizando uma notação alternativa para $L'(t^*)$.

Não é mais rápido e menos trabalhoso? Você percebeu que essa resolução não exigiu que calculássemos t^*. Veja, no próximo problema, uma situação parecida em que uma estratégia de solução como a primeira anterior não seria viável pelo simples fato de não ser disponível uma informação que permita calcular t^* explicitamente.

Problema 2. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem comprimento constante de $6\ m$. O comprimento do cateto B varia com o tempo de modo que, num dado instante, seu valor é $3\ m$ e sua taxa de variação é $-8\,m/h$. Determine a taxa de variação do outro cateto, nesse instante.

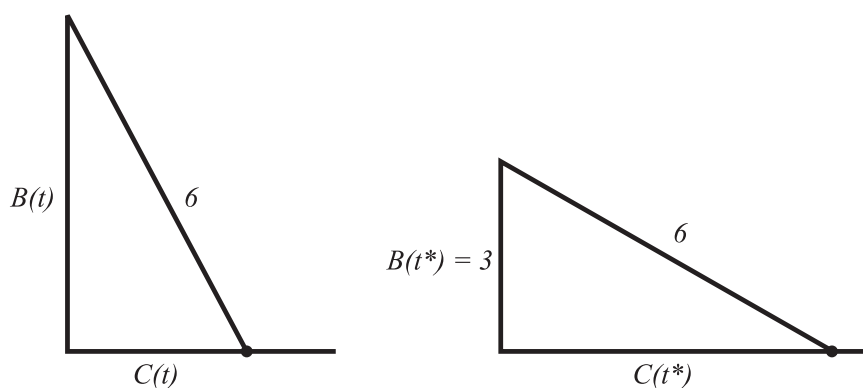



Figura 1 - Triângulo retângulo de hipotenusa 6, e catetos $B(t)$ e $C(t)$

Resolução. Denotemos por C o outro cateto. Então, segue do Teorema de Pitágoras que $B^2 + C^2 = 36$. Desejamos encontrar $C'(t^*)$ em que t^* denota o instante em que $B(t^*) = 3$. De acordo com o enunciado acima, $B'(t^*) = -8$ (assim, B está decrescendo nesse instante). Entretanto, o enunciado não nos permite encontrar uma expressão para $B(t)$ da qual obteríamos t^*. Observe que não podemos concluir que a taxa de variação $B'(t)$ é constante e igual a -8. Na verdade, só temos a informação sobre essa taxa no instante t^*.

Assim, nossa única alternativa é utilizar a Regra da Cadeia para obtermos a taxa de variação $C'(t)$. Temos, derivando a equação $B^2 + C^2 = 36$ em relação a t:

$$2B\frac{dB}{dt} + 2C\frac{dC}{dt} = 0$$

Agora, dividindo essa última equação por 2 e avaliando-a em $t = t^*$, considerando, ainda, que $B(t^*) = 3$ e que $\frac{dB}{dt}(t^*) = -8$, encontramos

$$3\times(-8) + C(t^*)\frac{dC}{dt}(t^*) = 0.$$

Mas, lembrando que $3^2 + C(t^*)^2 = 36$, obtemos $C(t^*) = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$ e, substituindo esse valor na equação acima, encontramos $\frac{dC}{dt}(t^*) = \frac{24}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Portanto, a taxa de variação pedida é

$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ *m/h*. (O valor positivo indica que *C* está crescendo no instante *t**.)

Problema 3. Um trem *A* deixa uma estação num certo instante, e viaja sempre na direção norte a uma velocidade de *80 km/h*. Um segundo trem, *B,* deixa a mesma estação *2* horas depois e viaja sempre na direção leste a uma velocidade de *96 km/h*. Determine a taxa de variação da distância entre os trens 1h e 30min depois de o trem *A* ter deixado a estação.

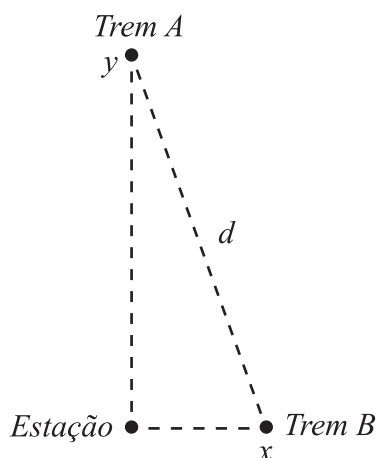



Figura 2 - Posição relativa dos trens *A* e *B*

Resolução. Consideremos como instante inicial ($t = 0$) aquele em que o trem *B* saiu da estação. Denotemos por x a distância entre o trem *B* e a estação, por y a distância entre o trem *A* e a estação e por d a distância entre os dois trens. Assim, após t horas da partida do trem *B*, essas distâncias se relacionam da seguinte forma: $d^2 = x^2 + y^2$. Se derivarmos essa equação com respeito a *t,* vamos encontrar $2dd' = 2xx' + 2yy'$, a qual é válida para $t \geq 0$.

Dividindo essa equação por *2* e isolando a derivada d', obtemos, para cada instante $t \geq 0$:

$$d' = \frac{x\,' + y\,'}{d}.$$

De acordo com o enunciado do problema, precisamos determinar $d'(1{,}5)$. Dos valores acima, necessários para o cálculo de $d'(1{,}5)$, dispomos somente de $x'(1{,}5) = 96$ e $y'(1{,}5) = 80$. (Observe que a partir do instante inicial considerado, as velocidades dos trens *A* e *B* são constantes e respectivamente dadas por $y'(t) = 80$ e $x'(t) = 96$, para $t \geq 0$.)

Sendo assim, necessitamos encontrar $d(1{,}5)$, $x(1{,}5)$ e $y(1{,}5)$. Mas, como $d^2 = x^2 + y^2$ para $t \geq 0$, basta que encontremos $x(1{,}5)$ e $y(1{,}5)$, pois $d(1{,}5) = \sqrt{x(1{,}5)^2 + y(1{,}5)^2}$.

No momento em que o trem *B* partiu (instante $t = 0$ que estamos considerando), o trem *A* estava a *160 km* distantes da estação. Como ele continuou com a velocidade constante de *80 km/h,* sua distância à estação se exprime por $y(t) = 160 + 80t$, para $t \geq 0$. Já o trem *B*

manteve sua velocidade constante e igual a *96 km/h* e se encontrava inicialmente na estação. Logo, sua distância à estação se expressa por $x(t) = 96t$, para $t \geq 0$.

Assim, $x(1{,}5) = 96 \times 1{,}5 = 144$, $y(1{,}5) = 160 + 80 \times 1{,}5 = 280$ e

$$d(1{,}5) = \sqrt{x(1{,}5)^2 + y(1{,}5)^2} = \sqrt{144^2 + 280^2} \approx 188{,}73.$$

Agora que temos todos os dados para calcular $d'(1{,}5)$, encontramos

$$d'(1{,}5) = \frac{x(1{,}5)x'(1{,}5) + y(1{,}5)y'(1{,}5)}{d(1{,}5)} = \frac{144 \times 96 + 280 \times 80}{\sqrt{144^2 + 280^2}} \approx 115{,}05.$$

Ou seja, a taxa de variação pedida é de aproximadamente *115,05 km/h.*

Problema 4.[2] Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio *2 m* e altura igual a *4 m*. Se a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de $2\ m^3/min$, encontre a taxa de variação (em relação ao tempo) do nível de água quando esse nível for *3 m*.

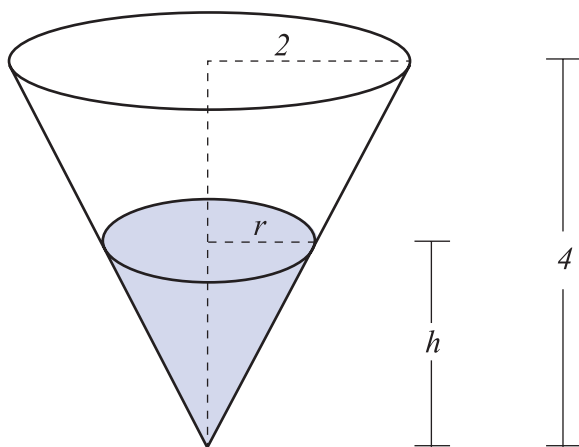



Figura 3 - O volume *V* de um cone com certo raio *r*

Resolução. Para um nível *h,* a água ocupa o volume *V* de um cone com certo raio *r*. A relação entre essas três quantidades é $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$. Observamos, ainda, que podemos relacionar *r* e *h* utilizando semelhança de triângulos.

[2] Ver Stewart. *Cálculo.*

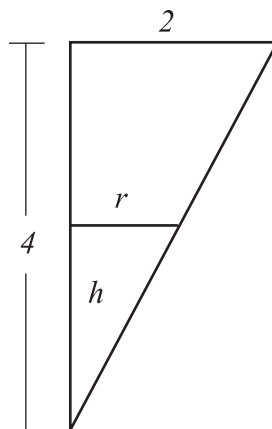



Figura 4- Relacionando r e h por meio de semelhança de triângulos

O triângulo retângulo de catetos 2 e 4 é semelhante ao triângulo retângulo de catetos r e h. A razão de semelhança é $\frac{2}{r}=\frac{4}{h}$, uma vez que os catetos 2 e r são opostos a um mesmo ângulo.

Assim, podemos concluir que $r=\frac{h}{2}$ em cada instante t.

Substituindo essa relação na equação $V=\frac{\pi}{3}r^2h$, encontramos

$V=\frac{\pi}{3}(\frac{h}{2})^2h=\frac{\pi}{12}h^3$.

Desejamos encontrar $h'(t^*)$ em que t^* é o instante em que $h(t^*)=3$. A partir do enunciado do problema, sabemos que $V'(t)=2$ para todo $t\geq 0$. Em particular, $V'(t^*)=2$.

Derivando a equação $V=\frac{\pi}{12}h^3$ em relação a t (tempo), encontramos

$V'=\frac{\pi}{12}3h^2h'=\frac{\pi}{4}h^2h'$, ou

$$h'=\frac{4}{\pi}\frac{V'}{h^2}.$$

Como conhecemos $V'(t^*)=2$ e $h(t^*)=3$, já podemos calcular $h'(t^*)$. De fato, temos

$h'(t^*)=\frac{4}{\pi}\frac{V'(t^*)}{h^2(t^*)}=\frac{4}{\pi}\frac{2}{9}=\frac{8}{9\pi}$,

isto é, no momento em que o nível h é de $3\ m$, sua taxa de variação (velocidade) é de $\frac{8}{9\pi}\approx 0{,}28\ m/min$. Como esse valor é positivo, conclui-se que o nível está aumentando nesse momento (como era de se esperar, pois o volume cresce a uma taxa positiva de $2\ m^3/min$).

3. EXERCÍCIOS

1. Um avião, à velocidade constante de *500 km/h*, voa horizontalmente a uma altitude de *2.000 m*, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância do avião até a estação está crescendo quando ele está a *4.000 m* da estação.

2. A luz de uma rua é colocada no topo de um poste de *15 m*. Um homem com *1,80 m* de altura anda afastando-se do poste com uma velocidade de *3 m/s* de acordo com uma trajetória reta. Quando o homem estiver a *40 m* do poste, determine, em relação ao poste:

a) a taxa de variação do comprimento de sua sombra.

b) a velocidade do topo de sua sombra.

3. Dois carros iniciam o movimento a partir de um mesmo ponto, no mesmo instante. Um viaja para o sul a *60 km/h*, e o outro para oeste a *25 km/h*. A que taxa está aumentando a distância entre os carros duas horas depois da partida?

4. A altura de um triângulo cresce a uma taxa de *1 cm/min*, enquanto a área do triângulo cresce a uma taxa de $2\ cm^2/min$. A que taxa está variando a base do triângulo quando a altura é *10 cm* e a área $100\ cm^2$?

5. Ao meio-dia, um navio *A* está *100 km* a oeste do navio *B*. O navio *A* está navegando para o sul a *35 km/h*, e o navio *B* está indo para o norte a *25 km/h*. Quão rápido está variando a distância entre eles às *4* horas da tarde?

6. O volume de um cubo está aumentando à taxa de $2\ cm^3$ por segundo. Com que taxa está variando a área de uma de suas faces, quando sua aresta tiver *20 cm*?

7. Uma partícula está se movendo ao longo do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto *(4, 2),* sua coordenada x está crescendo à taxa de *3 cm/s*. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

8. Um papagaio (pipa), a *100 m* acima do solo, move-se horizontalmente a uma velocidade de *3 m*/s. A que taxa está decrescendo o ângulo entre a linha e a horizontal depois de *200 m* de linha serem soltos?

4. REFERÊNCIAS

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira. v. 1.

AULA 13

Máximos e mínimos

OBJETIVOS
Definir as noções de máximos e mínimos absolutos e locais de uma função. Definir ponto crítico. Estabelecer critérios para decidir se um ponto crítico é ponto de máximo ou de mínimo de uma função.

1. INTRODUÇÃO

O estudo da derivada de uma função possibilita inúmeras aplicações, porque nos permitem detalhar a variação de funções em seu domínio.

Utilizando derivadas, vamos desenvolver um modo sistemático de traçar gráficos e de propor soluções para problemas de otimização.

Nesta aula, vamos introduzir as primeiras noções já com esse objetivo, que são as noções de *máximos* e *mínimos* de funções de uma variável.

2. VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS

2.1 Definição:

Seja $y = f(x)$ uma função derivável, definida para todo x em certo intervalo I.
(a) Um número real M, quando existe, é denominado de *valor máximo absoluto* (ou simplesmente *máximo*) da função $y = f(x)$ para x no intervalo I quando $f(x) \leq M$ para todo $x \in I$.
(b) Um número real m, quando existe, é denominado de *valor mínimo absoluto* (ou simplesmente *mínimo*) da função $y = f(x)$ para x no intervalo I, $m \leq f(x)$ para todo $x \in I$.
Os valores das abscissas x_M e x_m dos pontos $M = f(x_M)$ e $m = f(x_m)$ recebem, respectivamente, o nome de *ponto de máximo* e *ponto de mínimo*.

2.2 Exemplo: a função $y = sen(x)$

A Figura 1 representa o gráfico da função $y = sen(x)$ para valores de x no intervalo $I = [0, 3\pi]$. Observe que o máximo absoluto $M = 1$ da função ocorre em dois pontos: $x_1 = \pi / 2$ e $x_3 = 3\pi / 2$ e o mínimo absoluto $m = -1$ ocorre somente no ponto $x_2 = \pi$. Entretanto, o *valor* máximo absoluto, quando existe, é único e o mesmo ocorre com o valor mínimo.

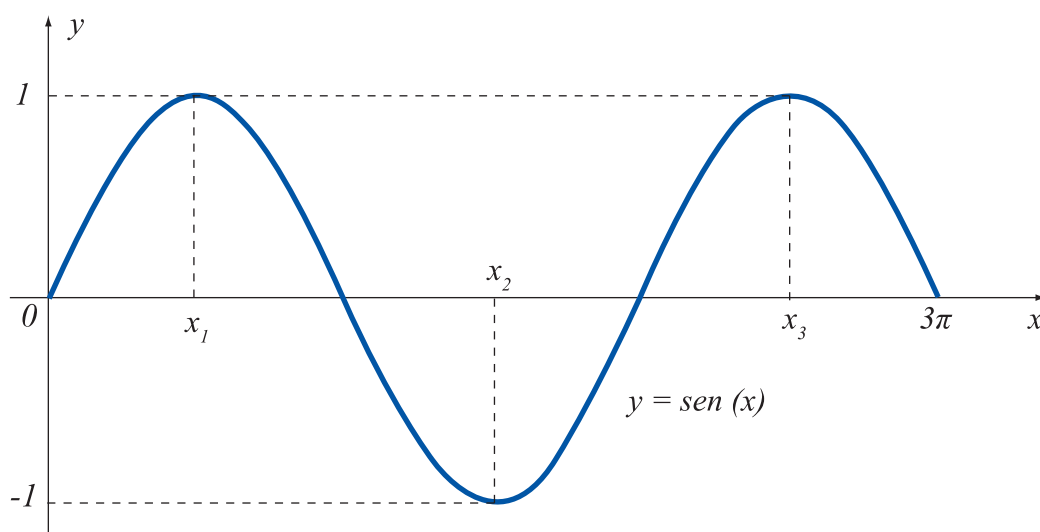



Figura 1 - Valores máximos e mínimos da função $y = sen(x)$

2.3 Exemplo: a função $y = \frac{1}{x}$

Explore a representação do gráfico de $y = \frac{1}{x}$ na Figura 2 e confirme as seguintes afirmações:

a) tem um máximo absoluto $M = \frac{1}{a}$ e nenhum mínimo absoluto no intervalo $I = [a, \infty)$.

b) um mínimo absoluto $m = \frac{1}{b}$ e nenhum máximo absoluto no intervalo $I = (0, b]$.

c) um máximo absoluto $M = \frac{1}{a}$ e um mínimo absoluto $m = \frac{1}{b}$ no intervalo $I = [a, b]$.

d) não tem um máximo absoluto e nem um mínimo absoluto no intervalo $I = (0, \infty)$.

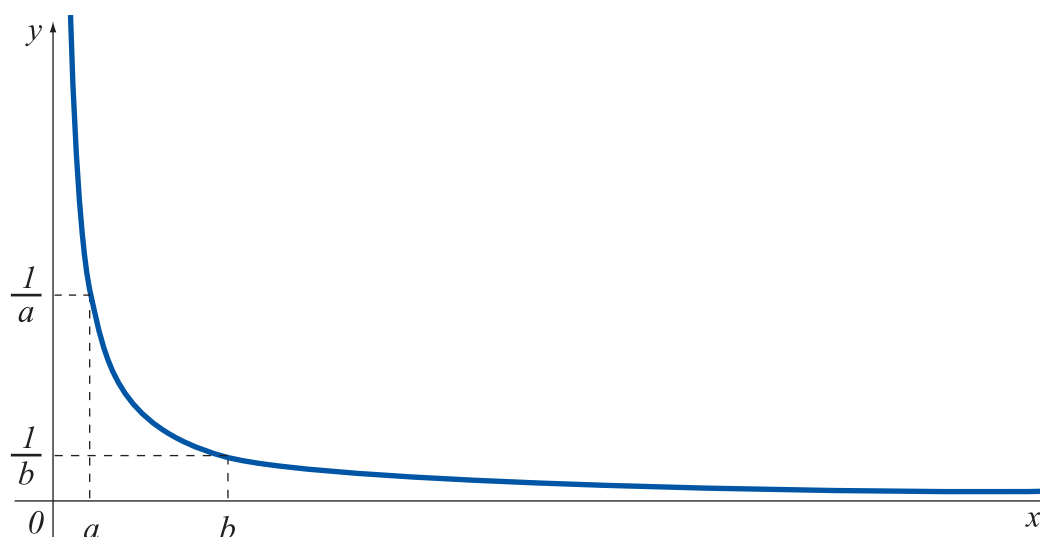



Figura 2 - A função $y = \frac{1}{x}$

Em síntese:

1) uma função $y = f(x)$ pode ter um valor máximo absoluto M atingido em dois ou mais pontos de máximo x_M, e o mesmo pode ocorrer para o valor mínimo absoluto m.

2) os valores máximo e mínimo absolutos de uma função $y = f(x)$ podem não existir.

2.4 Notação e linguagem

Os valores máximo e mínimo de uma função são também chamados *valores extremos* ou, simplesmente, *extremos* da função.[1]

3. VALORES MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Veja o gráfico da função na Figura 3.

Para os valores de x próximos de $x = c$, por exemplo, pertencentes ao intervalo $I = [a, d)$, vale $f(x) \leq M = f(c)$ para todo $x \in I$.

De modo semelhante, para $x = e$, observe que $f(x) \geq M = f(e)$ para todo $x \in I = (d, f)$.

No entanto, nenhum dos dois pontos satisfaz a definição 2.1 no intervalo $I = [a, b]$.

[1] No caso de funções constantes, todos os seus valores são, simultaneamente, valores máximos e mínimos. Em muitos textos de Cálculo, os valores máximo e mínimo absolutos são também chamados máximos e mínimos *globais*. Você pode usar essa terminologia, se preferir.

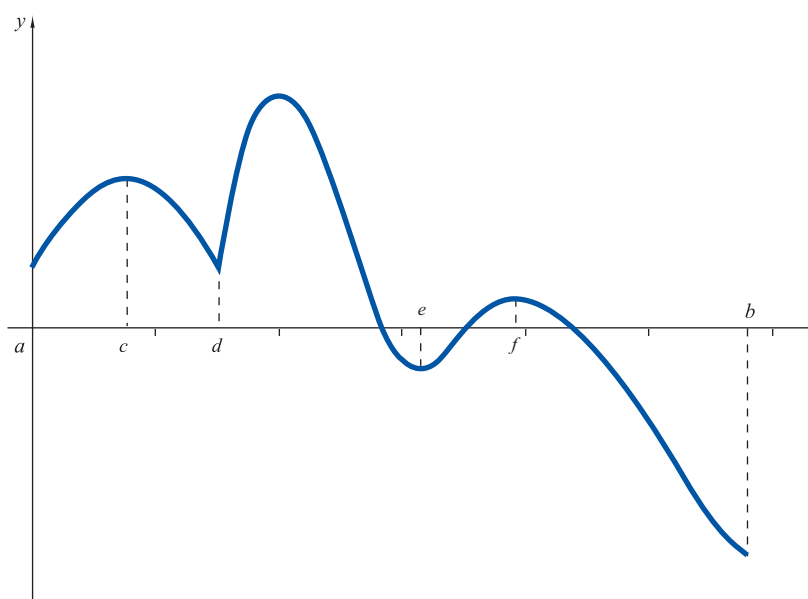



Figura 3 - Identificando máximos e mínimos locais

Situações como essas são denominadas situações *locais*, e também são importantes no estudo de funções. Veja a definição a seguir:

3.1 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função definida para todo x em certo intervalo *I*.

(a) O valor $M = f(c)$, quando existe, é denominado *valor máximo local* da função $y = f(x)$ se existe um intervalo $I = (a,b)$ que contém c tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in I$.

(b) O valor $m = f(c)$, quando existe, é denominado de *valor mínimo local* da função $y = f(x)$ se existe um intervalo $I = (a,b)$ que contém c tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

Os valores das abscissas recebem, respectivamente, o nome de *ponto de máximo local* e *ponto de mínimo local*.

3.2 Notação e linguagem

Os valores máximo e mínimo locais de uma função são também chamados *valores extremos locais* ou simplesmente, *extremos locais* da função.[2]

Observe ainda na Figura 3 que um valor mínimo local de uma função pode ser maior que um valor máximo local da função! Compare os

[2] No caso de funções constantes, todos os seus valores são, simultaneamente, valores máximo e mínimo locais.

pontos de abscissas $x = d$ e $x = e$. E observe também que os pontos de máximo e mínimo absolutos são, em particular, pontos de máximos e mínimos locais, pela nossa definição.[3] Essa observação pode ser generalizada para outras funções, e por esse motivo os critérios para identificar pontos máximos e mínimos locais são importantes.

4. CRITÉRIOS PARA DETERMINAR MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS

Retome as figuras 1, 2 e 3 e confirme que os valores máximo e mínimo locais ocorrem em pontos onde a tangente à curva do gráfico é horizontal ou onde a curva não admite tangente. Ou seja, em pontos c onde $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Os critérios algébricos relacionados para decidirmos se um ponto $x = c$ é um ponto de máximo ou de mínimo local, ou nenhum desses, estão relacionados a essa observação.

4.1 Proposição

Seja $y = f(x)$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Se f assume seu máximo ou mínimo em um ponto $x = c$ no intervalo aberto (a,b), então ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Demonstração da proposição:

Supor que $x = c$ é um extremo local da função $y = f(x)$. Se $f'(c)$ não existe, não há o que provar.

Supor então que exista $f'(c)$. Como $f'(c)$ é um número real, ele deverá satisfazer uma das três condições:

a) $f'(c) > 0$ b) $f'(c) < 0$ ou c) $f'(c) = 0$.

A demonstração consiste em mostrar que as duas primeiras opções não são possíveis. Vamos trabalhar com a primeira hipótese, de que $f'(c) > 0$, e mostrar que ela não é possível.[4]

Veja que, por definição, $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ e então $f'(c) > 0$ é o mesmo que dizer que

$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. Assim, existe um intervalo aberto (a,b) que

contém $x = c$ tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

[3] Exceto quando estes ocorrem nos extremos do intervalo de definição da função.

[4] Para a segunda hipótese, de $f'(c) < 0$, a argumentação se constrói de modo semelhante.

Para que isso aconteça, devem valer as inequações:

1) $f(x)-f(c)>0$ e $x-c>0$, para x em (a,b) e $x\neq c$;

2) $f(x)-f(c)<0$ e $x-c<0$, para x em (a,b) e $x\neq c$.

Isto quer dizer que $f(x)>f(c)$ sempre que $x>c$, para x em (a,b), e

$f(x)<f(c)$ sempre que $x<c$, para x em (a,b).

Em decorrência, o ponto $x=c$ não é ponto nem de máximo nem de mínimo local. De modo semelhante, $f'(c)<0$ nos leva a uma contradição.

Afirmamos então que devemos ter $f'(c)=0$.

A partir dessa proposição, identificamos os pontos c onde $f'(c)=0$ ou onde f' não existe como pontos importantes no estudo de máximos e mínimos. Por isso lhes damos um nome.

4.2 Definição

Um número $x=c$ é denominado um *ponto crítico* de f caso $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não exista.

Usando essa terminologia, veja que os *extremos locais* de uma função f devem ser procurados dentre os seus *pontos críticos*.

4.3 Exemplo: identificando pontos críticos

Seja a função $y=x^3-15x$, definida no intervalo $(-5,5)$.

Como ela é uma função polinomial e admite derivada em todos os seus pontos, seus pontos críticos serão todos os números em seu domínio que anulam sua derivada.

Os zeros da função derivada são

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-15 \text{ e } 3x^2-15=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5} \text{ ou } x=-\sqrt{5}.$$

Ambos os pontos estão dentro do domínio da função. Veja no gráfico da função na Figura 4 que $x=\sqrt{5}$ é um ponto de mínimo local e $x=-\sqrt{5}$ é um ponto de máximo local. No entanto, não há pontos de máximos e mínimos absolutos.[5]

[5] Você sabe dizer por quê?

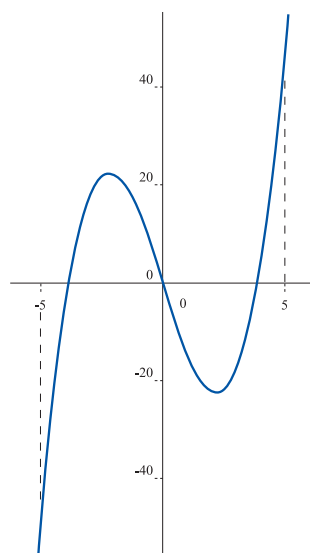



Figura 4 - Pontos críticos de $y = x^3 - 15x$

4.4 Exemplo: localizando pontos críticos de $y = x^3$

O domínio da função $y = x^3$ é $(-\infty, +\infty)$. Encontrando a expressão de sua derivada $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, seus pontos críticos serão raízes de $3x^2 = 0$. Isso significa que $x = 0$ é o único ponto crítico.

Veja na Figura 5 e observe que esse é um exemplo de um ponto crítico que não é ponto extremo da função.[6]

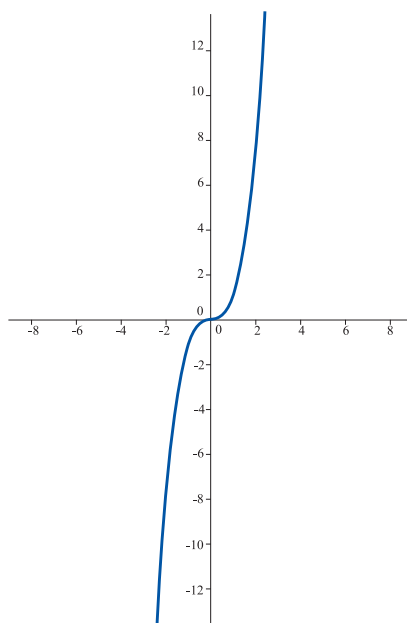



Figura 5 - Ponto crítico de $y = x^3$

[6] Isso pode acontecer, e não contradiz a proposição 4.1. Leia a proposição novamente, e confirme o fato de que sua recíproca não está enunciada.

Vale colocar a questão: como decidir se um ponto crítico é ou não um ponto extremo da função, sem conhecermos o seu gráfico? [7]

A seção a seguir é dedicada a essa questão.

5. O TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

Nesta seção, vamos identificar o crescimento e o decrescimento de uma função por meio da análise do sinal de sua derivada. Informações sobre os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função são importantes no estabelecimento de um teste para identificação de pontos de máximos e mínimos locais.

Com essa intenção, retome as figuras 1, 2 e 3 desta aula para confirmar os seguintes fatos:

próximo a um ponto[8] de máximo local $x = c$, a função é crescente para $x < c$ e decrescente para $x > c$;

próximo a um ponto de mínimo local $x = c$ a função é decrescente para $x < c$ e crescente para $x > c$.

Retome as noções de função crescente e decrescente.

Essas noções estão relacionadas com a de taxa média de crescimento da função:

função crescente tem taxa de variação média positiva;

função decrescente tem taxa de variação média negativa.

A proposição a seguir relaciona o crescimento e decrescimento da função com sua derivada, que é sua taxa instantânea de variação.[9]

5.1 Proposição

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Assim:

a) Se $f'(x) > 0$ em (a,b), então f é crescente em (a,b).

b) Se $f'(x) < 0$ em (a,b), então f é decrescente em (a,b).

Nesta aula, vamos aprender a utilizar o resultado enunciado em 5.1.

5.2 Exemplo: utilizando a Proposição 5.1

Seja a função $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8$. Para determinar os intervalos onde ela é crescente e onde é decrescente, devemos identificar os intervalos em que a sua derivada é positiva e em que é negativa. Derivando a função,

[7] Mais importante: como decidir se um ponto crítico é ou não um ponto extremo da função, como suporte para o esboço de seu gráfico?

[8] A análise que estamos fazendo é uma análise local; ou seja, requer identificar um "recorte" em torno de $x = c$ onde vale a observação. Isso é feito por meio da escolha de um intervalo adequado, se existir, em que a propriedade se verifique.

[9] As demonstrações de ambos os resultados não serão abordadas nesta aula, porque se fundamentam em um teorema importante, que será também discutido em aula posterior.

$f'(x)=\frac{3}{4}.4x^3-3x^2-6x=3x(x^2-x-2)=3x(x-2)(x+1).$

Os pontos críticos da função são os pontos x tais que $f'(x)=0$; ou seja, os pontos em que $f'(x)=3x(x-2)(x+1)=0$. Nesse exemplo, os números críticos[10] são -1, 0 e 2.

Como esses são zeros de funções contínuas, são eles que determinam as possíveis mudanças de sinal da função derivada. Para o estudo do sinal da derivada, podemos organizar um quadro levando em conta os intervalos da reta que contém os números críticos em seus extremos:

Tabela 1:

Intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2+8$

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$3x$	<0	<0	>0	>0
$(x-2)$	<0	<0	<0	>0
$(x+1)$	<0	>0	>0	>0
$f'(x)$	<0	>0	<0	>0
$f(x)$	decrescente	crescente	decrescente	crescente

Assim, determinamos os intervalos de crescimento e decrescimento da função:

Intervalos de crescimento: $(-1,0)$ e $(2,+\infty)$.

Intervalos de decrescimento: $(-\infty,-1)$ e $(0,2)$.

5.3 Teste da Derivada Primeira

Seja $x=c$ um número crítico de uma função f, contínua em $c\in(a,b)$ e diferenciável em (a,b), exceto, talvez, no próprio $x=c$. Valem as seguintes afirmações:

- se $f'(x)>0$ para $a<x<c$ e $f'(x)<0$ para $c<x<b$, então o ponto $x=c$ é ponto de máximo local.

- se $f'(x)<0$ para $a<x<c$ e $f'(x)>0$ para $c<x<b$, então o ponto $x=c$ é ponto de mínimo local.

- se $f'(x)>0$ ou $f'(x)<0$ para todo x em (a,b), exceto talvez no ponto $x=c$, então $x=c$ não é ponto nem de máximo nem de mínimo local.

[10] Um produto é igual a zero quando um de seus fatores é nulo.

5.4 Exemplo: utilizando o teste da derivada primeira

Para determinarmos os pontos de máximos e mínimos locais de $f(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3-3x^2+8$ pelo teste da derivada primeira devemos, em primeiro lugar, determinar seus pontos críticos.

Do exemplo anterior, estes pontos são: -1, 0 e 2.

Depois, devemos identificar os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Da Tabela 1, vemos que a função $f(x)$ satisfaz:

- em $x=-1$: decresce antes e cresce depois.

- em $x=0$: cresce antes e decresce depois.

- em $x=2$: decresce antes e cresce depois.

Assim, a função tem mínimos locais em $x=-1$ e $x=2$ e um máximo local em $x=0$.

Para encontrar os *valores* máximo e mínimo locais, devemos encontrar $f(-1)$, $f(0)$ e $f(2)$.

5.5 Exemplo: máximo e mínimo locais da função $y=xe^{x^3}$

Para determinarmos os pontos de máximo e mínimo locais da função $y=xe^{x^3}$, podemos proceder como nos dois exemplos anteriores.

Primeiro, encontramos a expressão de sua derivada: $y'=e^{x^3}+x.3x^2e^{x^3}$.

Reescrevendo a expressão e fazendo $y'=0$ para determinarmos seus pontos críticos:

$$y'=e^{x^3}\left(1+3x^3\right)=0.$$

Nesse exemplo, a solução da equação é única e deve satisfazer $1+3x^3=0$; ou seja,

$$x=\frac{-1}{\sqrt[3]{3}}=-3^{\frac{-1}{3}}.$$

Como a função $y=xe^{x^3}$ é derivável em todo seu domínio, $x=-3^{\frac{-1}{3}}$ é seu único ponto crítico.

Agora, vamos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Uma vez que $e^{x^3}>0$ sempre, o sinal da derivada é determinado pelo sinal de $\left(1+3x^3\right)$.

A Tabela 2 organiza os dados.[11]

[11] Confira as informações nessa tabela, resolvendo as inequações $\left(1+3x^3\right)>0$ e $\left(1+3x^3\right)<0$.

Tabela 2:

Intervalos de crescimento e decrescimento de $y = xe^{x^3}$

Intervalo	$\left(-\infty, -3^{\frac{-1}{3}}\right)$	$\left(-3^{\frac{-1}{3}}, +\infty\right)$
e^{x^3}	> 0	> 0
$(1+3x^3)$	< 0	> 0
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	decrescente	crescente

Pelo teste da derivada primeira, o ponto $x = -3^{\frac{-1}{3}}$ é um ponto de mínimo local da função $y = xe^{x^3}$.

Para determinarmos o valor mínimo local, escrevemos:

$$y\left(-3^{\frac{-1}{3}}\right) = -3^{\frac{-1}{3}}.e^{\frac{-1}{27}} = \frac{-1}{3^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{27}}}.$$

5.6 Exemplo: máximos e mínimos de $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

A derivada de $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ é $y' = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{-1}{3}} = \dfrac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$.

Observe que ela é sempre diferente de zero; mas a derivada não existe em $x = 2$, que pertence ao domínio da função. Esse é então um ponto crítico.

O sinal da derivada da função é o mesmo sinal de $(x-2)^{\frac{1}{3}}$, que é o mesmo sinal de $(x-2)$.

A Tabela 3 organiza as informações que precisamos para usar o teste da derivada primeira.

Tabela 3:

Intervalos de crescimento e decrescimento de $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-2)^{\frac{1}{3}}$	< 0	> 0
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	decrescente	crescente

Do teste da derivada primeira, $y = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ tem um ponto de mínimo local em $x = 2$.

O valor mínimo local da função é $y(2)=(2-2)^{\frac{2}{3}}=0$.

Como será o gráfico de uma função como essa, que tem um ponto de mínimo local em um ponto em que a função não admite derivada?

Nós vamos aprender a traçar gráficos como esses em uma próxima aula.

6. EXERCÍCIOS

1. Encontrar os pontos críticos das seguintes funções:

a) $y=x^4-4x^2+3$ b) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}$

c) $y=xe^x$ d) $y=\cos x+\operatorname{sen}x$

2. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

a) $y=x^3+x^2-x-1$ b) $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)$

c) $y=xe^x$ d) $y=\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x$

3. Pelo teste da derivada primeira, encontre os máximos e mínimos locais das funções do item 2.

4. Esboce o gráfico de uma função com domínio *IR* que tenha um máximo local em $(1,2)$ e um mínimo global em $(2,2)$.

7. REFERÊNCIAS

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008 (Educação a Distância).

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1991.

AULA 14

Derivadas de ordem superior

OBJETIVOS
Definir derivadas de ordem superior. Estudar o significado da derivada segunda, ou derivada de ordem dois. Definir as noções de concavidade de curvas e ponto de inflexão. Enunciar e usar o teste da derivada segunda.

1. INTRODUÇÃO

Ao derivarmos uma função f, obtemos uma nova função – a função derivada.

Faz sentido perguntar: podemos calcular a taxa de variação da função derivada? Por exemplo, se a interpretação de taxa for a de *velocidade* de um movimento, a taxa de variação da velocidade corresponderia ao que denominamos *aceleração* do movimento.

Na verdade, o cálculo da taxa de variação de uma derivada é possível, às vezes, até mais de uma vez.

Nesta aula, vamos estudar o processo de derivar, ou diferenciar, uma função f mais de uma vez. Vamos estudar as informações que podemos obter sobre o gráfico de f a partir da derivada de sua derivada, chamada derivada segunda de f.

Começamos a discussão com um exemplo.

2. EXEMPLO: DERIVANDO MAIS DE UMA VEZ

A derivada da função $y = f(x) = 3x^6 + 7x^5 - x^2 - 4x + 8$ é

$$\frac{dy}{dx} = 18x^5 + 35x^4 - 2x - 4.$$

Veja que a função derivada é novamente uma função polinomial e, portanto, também admite derivada.

Podemos escrever:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d}{dx}(18x^5+35x^4-2x-4)=90x^4+140x^3-2\,.$$

Essa nova função é chamada *derivada segunda* de $y=f(x)$, ou derivada de ordem 2.

No caso especial desse exemplo, a função derivada segunda pode ser derivada novamente. A derivada da derivada segunda é chamada *derivada terceira*, ou derivada de ordem 3.

Nesse exemplo e no caso dos polinômios, em geral, podemos derivá-los, indefinidamente!

Em algum momento, obtemos a função identicamente nula. Quer ver como funciona no exemplo que estamos trabalhando?

A *derivada terceira* de $y=f(x)$ será $360x^3-420x^2$.

A *derivada quarta* de $y=f(x)$ será $1080x^2-840x$.

A *derivada de ordem 5* será $2160x-840$.

A *derivada de ordem 6* será 2160. Veja que, a partir dessa ordem na derivada, todas as demais derivadas serão nulas!

3. DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Muitas funções admitem ser diferenciadas mais de uma vez, como no exemplo anterior.

Antes de prosseguirmos com outros exemplos, vamos estabelecer a notação e a linguagem que é utilizada no Cálculo para falar de derivadas de ordem superior à primeira.[1]

3.1 Notação e linguagem

A derivada da função derivada de f é chamada derivada segunda ou derivada de ordem dois de f. Denota-se por

$\frac{d^2f}{dx^2}$ ou f''.

Em geral, a derivada de ordem n de uma função f, que corresponde à função obtida derivando n vezes a função, quando puder ser calculada, denota-se por $\frac{d^nf}{dx^n}$ ou $f^{(n)}$.

[1] A notação parece complicada, mas é a que vem sendo adotada. Você verá nos exemplos como utilizá-la.

3.2 Exemplo: a derivada de ordem n de um polinômio

Para a função polinomial do exemplo, calculamos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 90x^4 + 140x^3 - 2.$$

Podemos também escrever

$$y'' = 90x^4 + 140x^3 - 2, \text{ ou } f'' = 90x^4 + 140x^3 - 2.$$

As derivadas de ordem superior a dois de outra função polinomial qualquer, por exemplo, $y = 3x^6 + 7x^5 - x^2 - 4x + 8$, são calculadas e denotadas do mesmo modo. No caso dessa última função, a derivada de ordem 7, $\frac{d^7f}{dx^7}$ vale zero! Confirme esse fato!

Para $n \geq 7$, as derivadas de todas as ordens da função $y = 3x^6 + 7x^5 - x^2 - 4x + 8$ existem, e são nulas.

3.3 Exemplo: a derivada de ordem n da função $y = e^x$

Confirme que $\frac{d^n(e^x)}{dx^x} = e^x$. Assim, $y = e^x$ também admite derivada de todas as ordens!

3.4 Exemplo: a derivada de ordem n da função $y = senx$

Podemos escrever:

$$y' = cos\,x,\ y'' = -senx,\ y''' = -cos\,x,\ y^{iv} = senx.$$

Observe que recaímos na função $y = senx$, na quarta derivada. A partir daí, podemos continuar a derivar indefinidamente, e as expressões da derivada vão ter os mesmos valores, ciclicamente.

3.5 Exemplo: derivada de ordem 2 de funções expressas implicitamente

Retome a função $y = f(x)$, definida implicitamente por $x^2 + y^2 = 1$, e sua derivada $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$, encontrada no exemplo 3.1.

A proposta aqui é a de calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Para isso, vamos derivar a função $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ uma segunda vez:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{y}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y.\left(\frac{d}{dx}\right)(x) - x.\left(\frac{d}{dx}\right)(y)}{y^2} = -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Substituindo $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ na expressão,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x.\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2}.$$

Simplificando a expressão,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{y^2+x^2}{y}}{y^2} = -\frac{1}{y^3}.$$

4. O SIGNIFICADO DA DERIVADA SEGUNDA

Na aula anterior, estudamos o sinal da derivada primeira de $y = f(x)$ e obtivemos informações sobre onde a função é crescente e onde ela é decrescente.

Da mesma forma, podemos usar o sinal da derivada segunda para informações sobre a derivada primeira – onde a derivada primeira é crescente e onde ela é decrescente. Vamos iniciar essa discussão com um exemplo.

4.1 Exemplo: aceleração e velocidade

A aceleração de um movimento, por exemplo, de um carro na estrada, corresponde à variação da velocidade. Se f modela o movimento de um corpo em linha reta, a derivada f' tem o significado de sua velocidade, e f'', de sua aceleração.

A aceleração f'', quando maior que zero, indica crescimento da função velocidade f'.

Quando menor que zero, indica redução ou decrescimento da velocidade.

Em linguagem matemática, escrevemos

$f''(x) > 0$ em um intervalo aberto I $\Rightarrow$ $f'(x)$ é crescente em I ;

$f''(x) < 0$ em um intervalo aberto I $\Rightarrow$ $f'(x)$ é decrescente em I .

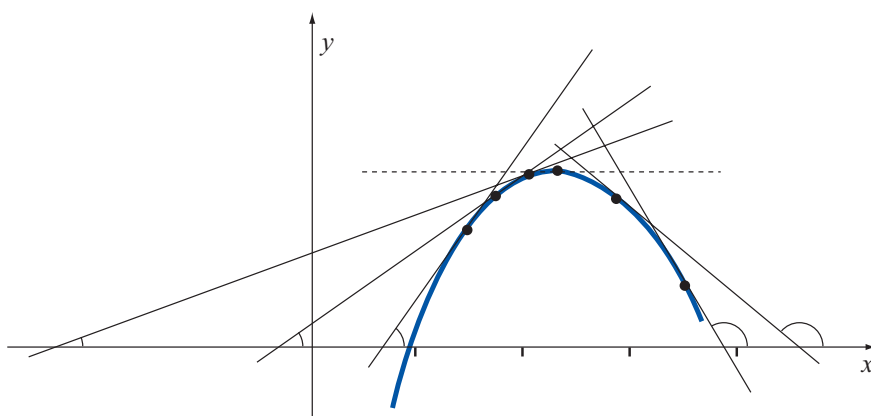



Figura 1- O significado de $f'(x)$ ser crescente ou decrescente

Na Figura 1, indicamos no gráfico de f o significado de $f'(x)$ ser crescente ou decrescente em um intervalo I.

Veja que $f'(x)$ crescente corresponde ao coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico de f aumentar quando x aumenta. E $f'(x)$ decrescente corresponde ao coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico de f diminuir quando x diminui.

A classificação na Definição 4.2 corresponde a essas duas possibilidades.

4.2 Definição

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em (a,b). Seu gráfico é

-côncavo para cima em (a,b) se $f'(x)$ é crescente em (a,b);

-côncavo para baixo em (a,b) se $f'(x)$ é decrescente em (a,b).

A análise da concavidade do gráfico de $y = f(x)$ fundamenta-se na Proposição 4.3.

4.3 Proposição

Seja $y = f(x)$ uma função que admite derivada segunda $f''(x)$ em (a,b).

Então o gráfico de f é

- côncavo para cima em (a,b) se $f''(x) > 0$ em (a,b);
- côncavo para baixo em (a,b) se $f''(x) < 0$ em (a,b).

Vamos utilizar essa proposição nos exemplos a seguir.

4.5 Exemplo: analisando concavidade do gráfico de funções polinomiais

Seja $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$. Calculando as derivadas, $f'(x) = 3x^2 + 10x$ e $f''(x) = 6x + 10$; $f''(x) = 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$;

$f''(x) = 6x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3} \Rightarrow$ a função é côncava para cima em $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$;

$f''(x) = 6x + 10 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{3} \Rightarrow$ a função é côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$.

Podemos organizar a informação numa tabela:

Tabela 1:

Análise dos sinais da derivada segunda de $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$

Intervalo	$\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$	$\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$
$6x + 10$	<0	>0
$f''(x)$	<0	>0
$f(x)$	Côncava para baixo	Côncava para cima

4.6 Exemplo: exponenciais e outras funções

A função $f(x) = xe^x$ tem derivadas:

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$$

$f''(x) = (2 + x)e^x = 0 \Leftrightarrow (2 + x) = 0$, porque $e^x \neq 0$, sempre.

Sumarizando a análise de sinal da derivada segunda:

Tabela 2:
Análise dos sinais da derivada segunda de $f(x) = xe^x$

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
$(2+x)$	<0	>0
$f''(x)$	<0	>0
$f(x)$	Côncava para baixo	Côncava para cima

5. PONTOS DE INFLEXÃO

5.1 Definição

Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de $y = f(x)$ é chamado *ponto de inflexão* se

- f é contínua em $x = c$;

- a concavidade do gráfico muda em $(c, f(c))$.

Relendo a Definição 5.1 em termos da Proposição 4.4, ela nos diz que a derivada segunda $f''(x)$ muda de sinal em $x = c$. Para que isso seja possível, $f''(c) = 0$, ou não existe $f''(c)$. Os pontos $x = c$ no domínio de $y = f(x)$, com essas características, são os candidatos a pontos de inflexão.

5.2 Exemplo: polinômios de terceiro grau

O ponto $(0,0)$ no gráfico de $f(x) = x^3$ é um exemplo de ponto de inflexão. Calculando $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$, veja que $f''(x)$ é contínua nos reais, e que $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

Esse será, então, o único candidato a ponto de inflexão.

Para verificar se $(0, f(0)) = (0,0)$ é um ponto de inflexão, podemos verificar se seu gráfico muda de concavidade em $(0,0)$. Algebricamente, isso corresponde a verificar se $f''(x) = 6x$ muda de sinal em $x = 0$.

Veja que $f''(x) = 6x > 0$ para $x > 0$ e $f''(x) = 6x < 0$ para $x < 0$. Assim, classificamos $(0,0)$ como ponto de inflexão de $f(x) = x^3$.

Esboce o gráfico de $f(x) = x^3$, que é uma função conhecida, e confirme o fato visualmente!

As funções polinomiais de terceiro grau, em geral, sempre admitirão um ou mais pontos de inflexão. Observe, por exemplo, que, para a função $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ em 4.5, há mudança de concavidade em $x = -\frac{5}{3}$. Então, $\left(-\frac{5}{3}, f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$ é ponto de inflexão da função.

5.3 Exemplo: exponenciais e outras funções

a) No Exemplo 4.6, confira que $\left(-2, -2e^{-2}\right)$ é ponto de inflexão.

b) Para $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + x)$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1+4x}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{1}{3}\left[x^{-\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right] \quad \text{e}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\left(\frac{-1+2x}{x^{\frac{5}{3}}}\right).$$

Para estudar sua concavidade, veja que $f''(x)$ não existe em $x = 0$, que é ponto onde a função é contínua, e $f''(x) = 0$ em $x = \frac{1}{2}$.

Na Tabela a seguir, sintetizamos a análise da concavidade de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + x)$.

Tabela 3:

Análise do sinal da derivada segunda de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + x)$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$(-1 + 2x)$	<0	<0	>0
$x^{\frac{5}{3}}$	<0	>0	>0
$f''(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	Côncava para cima	Côncava para baixo	Côncava para cima

Da análise acima, concluímos que $(0, f(0))$ e $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ são ambos pontos de inflexão.

6. O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Na Aula 13, aprendemos a classificar pontos críticos a partir do teste da derivada primeira. Nesta aula, vamos aprender outra forma de fazer essa classificação.

6.1 Proposição

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável em (a,b) com $f'(c) = 0$, para algum $c \in (a,b)$.

-se $f''(c) < 0$, então c é ponto de máximo local;

-se $f''(x) > 0$, então c é ponto de mínimo local;

-se $f''(c) = 0$, nada se pode afirmar.

6.2 Exemplo: retomando um exemplo já estudado

Na classificação dos pontos críticos da função

$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8$, na Aula 13, podemos usar a Proposição 6.1 e proceder do seguinte modo:

$f'(x) = \frac{3}{4}.4x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x^2 - x - 2) = 3x(x-2)(x+1)$ e

$f''(x) = 9x^2 - 6x - 6$.

Os pontos críticos são $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$. Usando 6.1, podemos escrever:

$f''(-1) = 9 > 0$, e então $x = -1$ é ponto de mínimo local;

$f''(0) = -6 < 0$, e então $x = 0$ é ponto de máximo local;

$f''(2) = 18 > 0$, e então $x = 2$ é ponto de mínimo local.

6.3 Exemplo: explorando funções trigonométricas

Seja a função $f(x) = 2\cos x + sen2x$, no intervalo $[0,2\pi]$.

A derivada da função é $f'(x) = -2senx + 2\cos 2x$.

Reescrevendo a expressão,

$f'(x) = -2senx + 2(\cos^2 x - sen^2 x) = -2senx + 2(1 - 2sen^2 x)$.

A determinação dos pontos críticos corresponde a resolver a equação $-4sen^2 x - 2senx + 2 = 0$, ou seja, $4sen^2 x + 2senx - 2 = 0$.

Para isso, utilizamos um artifício, que é denominar $m = senx$, e a equação, nesta releitura, se escreve $4m^2 + 2m - 2 = 0$. Sua solução é $m = \frac{1}{2}$ e $m = -1$. Lembrando que $m = senx$ e que o domínio da função é $[0,2\pi]$, temos como pontos críticos os valores $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$ (que correspondem a $senx = \frac{1}{2}$, no intervalo $[0,2\pi]$) e $x = \frac{3\pi}{2}$ (que corresponde a $senx = -1$, no intervalo $[0,2\pi]$).

Temos que $f''(x) = -2\cos x - 8 senx \cos x = 2\cos x(-1 - 4senx)$ e então

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6}\left(-1 - 4sen\frac{\pi}{6}\right) < 0$; e, portanto, $x = \frac{\pi}{6}$ é ponto de máximo local;[2]

$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6}\left(-1 - 4sen\frac{5\pi}{6}\right) > 0$; e, portanto, $x = \frac{5\pi}{6}$ é ponto de mínimo local.[3]

No caso de $x = \frac{3\pi}{2}$ temos $f''(x) = 0$; e, portanto, o teste nada nos garante em termos da classificação desse ponto como máximo ou mínimo local. Em casos como esses, recorremos a outros testes, como, por exemplo, o teste da derivada primeira, para fazer a classificação.

7. EXERCÍCIOS

1. Encontre as derivadas de segunda ordem das funções:

a) $y = \frac{1}{2}x - senx$ b) $y = xe^{x^2}$

c) $y = tan^2 x$ d) $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}$

2. Encontre a derivada segunda da função $y = f(x)$ definida implicitamente por:

a) $x^3 + y^3 = 1$ b) $xy - y^2 = 1$

c) $xseny = y$ d) $x^2y^2 - 1 = 0$

3. Ache os intervalos em que $y = f(x)$ é côncava para cima e é côncava para baixo:

a) $y = \ln(1 + x^2)$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$ c) $y = \sqrt[3]{(x+2)}$

[2] Lembre-se de que $x = \frac{\pi}{6}$ está no primeiro quadrante, e, portanto, $\cos\frac{\pi}{6}$ e $sen\frac{\pi}{6}$ são ambos maiores que zero.

[3] Lembre-se de que $x = \frac{5\pi}{6}$ está no segundo quadrante. Quais são os sinais de $\cos\frac{\pi}{6}$ e de $sen\frac{\pi}{6}$?

4. Identifique os pontos de inflexão das funções a seguir:

a) $y = x^4 + 2x^3 + 1$ b) $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ c) $y = x^2 \ln x$

5. Encontre os pontos críticos das funções abaixo, e use o teste da derivada segunda para classificá-los:

a) $f(x) = cos\,3x$ b) $y = 2x^3 - 6x + 6$ c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

6. Determine os valores de a, b, c e d de modo que a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha um mínimo relativo em $(0,0)$ e um máximo relativo em $(1,1)$.

7. Ache o valor de a para que $y = x^3 - ax^2 + 1$ tenha ponto de inflexão em $(1,-a)$.

8. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo:* um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância).

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1991.

AULA 15

Traçando gráficos

OBJETIVO
Utilizar os conceitos estudados para esboçar gráficos de funções.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos aprender a utilizar os conceitos estudados até aqui para esboçar gráficos de funções, usando lápis e papel.[1] Embora a tecnologia já nos ofereça meios para obter tais esboços usando outras mídias, o estudo do processo de esboçar gráficos tem sua importância na avaliação crítica das figuras apresentadas, por exemplo, na tela de um computador ou calculadora gráfica. Com essa intenção, iniciamos a discussão de traçados de gráficos, que será o tema desta e da próxima aula.

Nesta aula, vamos utilizar um roteiro para o traçado de gráfico, desenvolvendo dois exemplos. A próxima aula faz uso do mesmo roteiro para esboçar gráficos de outras funções.

[1] Inúmeras aplicações do Cálculo orientam-se por explorações qualitativas de funções reais f, ou seja, por avaliações do comportamento de seus valores $f(x)$. É para esse estudo de seu comportamento que o gráfico de uma função torna-se importante. Esboços de gráficos revelam, ou sugerem, propriedades que poderiam permanecer ocultas, não percebidas. Por exemplo, retome o estudo das exponenciais, que modelam decaimentos radioativos. O gráfico das exponenciais revela a presença permanente da radioatividade em casos de desastres ecológicos, mesmo que em medida suportável pelos seres vivos a partir de certo tempo.

2. ROTEIRO PARA O TRAÇADO DE GRÁFICOS

Para traçar gráficos de funções reais utilizando as ferramentas do cálculo que desenvolvemos até aqui, você pode proceder como a seguir:

1- Determine o *domínio* da função.
Domínio: conjunto de pontos da reta nos quais a função está definida.

2- Calcule os limites à esquerda e à direita dos pontos onde a função não está definida, identificando *assíntotas verticais*, caso existam.
Assíntotas verticais: Se $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$ é $+\infty$ ou $-\infty$, então a reta $x = a$ é uma assíntota vertical.

3- Avalie as *simetrias*.
Verifique se a função f é uma função *par* ou uma função *ímpar*. Se a função é par, há simetria em relação ao eixo y. Se a função f é ímpar, há simetria em relação à origem.

4- Identifique os pontos onde a função não é contínua, se existirem, calculando limites à esquerda e à direita dos mesmos.

5- Determine as *assíntotas horizontais*, caso existam. De qualquer modo, registre o resultado do cálculo dos limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
Assíntota horizontal: Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal.

6- Encontre os *interceptos* x e y.
Interceptos x e y: correspondem à interseção do gráfico de f com os eixos coordenados. Os valores solução de $f(x) = 0$ correspondem aos interceptos no eixo x e $f(0)$ corresponde ao intercepto no eixo y.

7- Identifique *pontos críticos* e *extremos locais*.
Pontos críticos: pontos onde a derivada não existe, ou é nula. Faça análise das regiões de crescimento ($f'(x) > 0$) e decrescimento ($f'(x) < 0$), e use o teste da derivada primeira para classificar os máximos e mínimos locais.

8- Analise a *concavidade* e *pontos de inflexão*.
Concavidade: Encontre $f''(x)$, e faça análise das regiões em que a curva do gráfico é côncava para cima ($f''(x) > 0$) e côncava para baixo ($f''(x) < 0$).

Pontos de inflexão: ponto onde f é contínua e onde há mudança de concavidade, ou seja, de sinal de $f''(x)$.

Veja como esboçar gráficos utilizando o roteiro descrito.

3. EXEMPLOS

3.1 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$.

1-Domínio:

O domínio de $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ consiste em todos os números reais.

2-Assíntotas verticais:

Não existem, porque a função está definida para todo valor de x.

3-Simetrias:

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8 = x^4 - 2x^2 - 8$.

Então a função é par. Veja que $f(x) = f(-x)$.

Isso quer dizer que o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y.

4 - Continuidade:

A função é contínua em toda a reta real, pois é uma função polinomial.

5 - Assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^4 - 2x^2 + 8\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^4 - 2x^2 + 8\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^4}\right) = +\infty$$

Não existem, portanto, assíntotas horizontais.

6 - Interseções com os eixos x e y:

Resolvendo $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 = 0$, obtemos as raízes reais $+2$ e -2, que correspondem aos interceptos x.[2]

O intercepto y será $f(0) = 0^4 - 20^2 - 8 = -8$.

7 - Pontos críticos e extremos locais:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \iff 4x(x^2 - 1) = 0$. Assim, $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$

são pontos críticos.

No quadro seguinte, o estudo das regiões de crescimento e decrescimento:

[2] Observe a simetria dos interceptos em relação ao eixo y.

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
x	<0	<0	>0	>0
x^2-1	>0	<0	<0	>0
$f'(x)$	<0	>0	<0	>0
$f(x)$	decrescente	crescente	decrescente	crescente

A função $f(x)$ passa de decrescente para crescente em $x=-1$ e em $x=1$. Pelo teste da derivada primeira, ambos são pontos de mínimo local. Já no caso de $x=0$, a função passa de crescente para decrescente, caracterizando-o como um ponto de máximo local.

8- Concavidade e inflexões:

$f''(x)=12x^2-4$ e candidatos a inflexões devem satisfazer $12x^2-4=0$.
Assim, $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ são candidatos a inflexões.
No quadro a seguir, a análise da concavidade do gráfico.

Intervalo	$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$12x^2-4$	>0	<0	>0
$f''(x)$	>0	<0	>0
$f(x)$	Côncava para baixo	Côncava para cima	Côncava para baixo

Ambos os pontos $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ são pontos de inflexão.
Sempre que possível, para nos auxiliar no esboço do gráfico, determinamos os valores da função em seus pontos extremos e nos de inflexão, caso existam. Esses valores, bem como os valores dos interceptos, constituem pontos de uma tabela de valores da função que são importantes para o esboço de seu gráfico.

x	$f(x)$
0	-8
1	-9
2	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-77}{9}$

Uma vez que a função é par, seus valores em -1, -2 e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ são os mesmos.

O esboço do gráfico sintetiza todas as informações que obtivemos anteriormente.

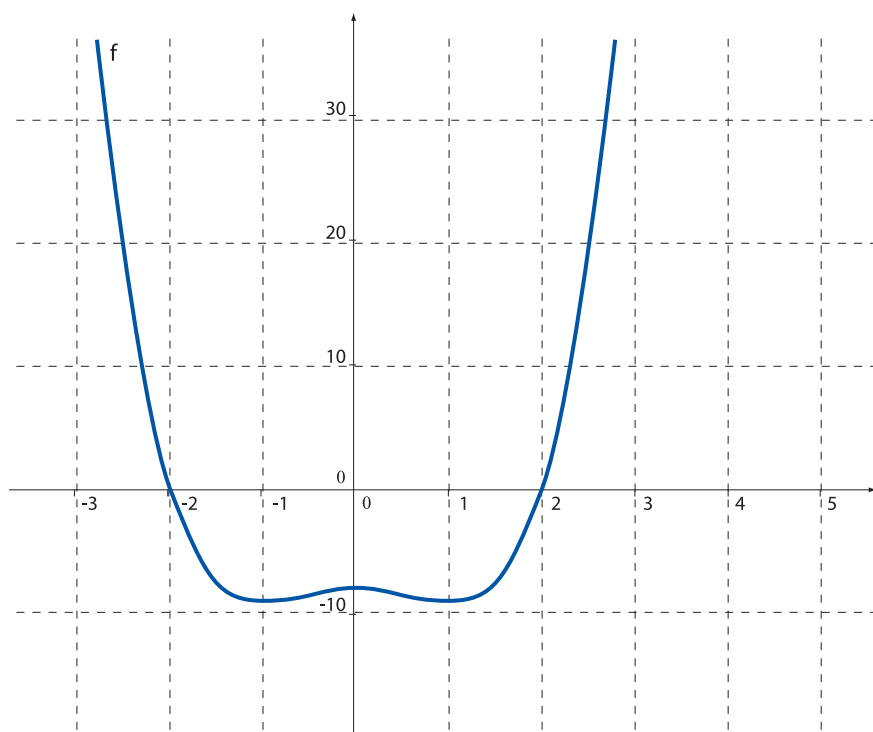



Figura 1 - Esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

3.2 Esboce o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$.

1- Domínio:

O domínio de $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$ consiste em todos os números reais, exceto os que anulam $16-x^2$; ou seja, exceto em -4 e $+4$.

2-Assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2}{16-x^2}=-\infty$, porque o numerador da expressão se estabiliza em $+16$ e o denominador em 0, por valores negativos;

$\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2}{16-x^2}=+\infty$, porque o numerador da expressão se estabiliza em $+16$ e o denominador em 0, por valores positivos;

$\lim\limits_{x\to +4^-}\dfrac{x^2}{16-x^2}=-\infty$, porque o numerador da expressão se estabiliza em $+16$ e o denominador em 0, por valores negativos;

$\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2}{16-x^2}=+\infty$, porque o numerador da expressão se estabiliza em $+16$ e o denominador em 0, por valores positivos.

Assim, $x=-4$ e $x=4$ são assíntotas verticais ao gráfico da função.

3- Simetrias:

A função $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$ é par porque

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{16-(-x)^2}=\frac{x^2}{16-x^2}=f(x).$$

Dessa forma, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

4- Continuidade:

A função é contínua em seu domínio.

5- Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{16-x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{16-x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1.$$

Assim, $y=-1$ é assíntota horizontal.

6- Interceptos x e y:

$f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$. Desse modo, o gráfico da função passa pela origem do sistema de coordenadas.

7- Pontos críticos e extremos locais:

$$f'(x)=\frac{2x(16-x^2)-x^2(-2x)}{(16-x^2)^2}=\frac{32x}{(16-x^2)^2}.$$

Veja que os pontos onde a derivada não existe são os mesmos onde a função não está definida. Portanto, não são pontos críticos:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 32x=0 \Leftrightarrow x=0$. Portanto, $x=0$ é o único ponto critico.

No quadro abaixo, o estudo das regiões de crescimento e decrescimento.

Intervalo	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
$(16-x^2)^2$	>0	>0	>0	>0
$32x$	<0	<0	>0	>0
$f'(x)$	<0	<0	>0	>0
$f(x)$	decrescente	decrescente	crescente	crescente

Observe a importância de acrescentarmos nesse quadro os pontos onde a derivada da função não existe. Isso é necessário, e você se certificará, no gráfico da função, que, se não fizermos isso, nossa análise não estará correta.

A função $f(x)$ passa de decrescente para crescente em $x=0$. Pelo teste da derivada primeira, $x=0$ é um ponto de mínimo local.

8- Estudo da concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x)=\frac{32(16-x^2)^2-32x(2(16-x^2).(-2x))}{(16-x^2)^4}=\frac{32(16-x^2)\left[16-x^2+4x^2\right]}{(16-x^2)^4}=\frac{32(16+3x^2)}{(16-x^2)^3}$$

$f''(x)\neq 0$ para todo x, e não está definida em pontos onde não há determinação da função $f(x)$. Portanto, não há candidatos a pontos de inflexão. No quadro a seguir, a análise da concavidade do gráfico.

Intervalo	$(-\infty,-4)$	$(-4,4)$	$(4,+\infty)$
$16+3x^2$	>0	>0	>0
$(16-x^2)^3$	<0	>0	<0
$f''(x)$	<0	<0	>0
$f(x)$	Côncava para baixo	Côncava para cima	Côncava para baixo

Na figura a seguir, sintetizamos as informações que discutimos, esboçando o gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$. Veja que basta fazermos o esboço para $x>0$, porque, por simetria, obtemos o ramo para $x<0$.

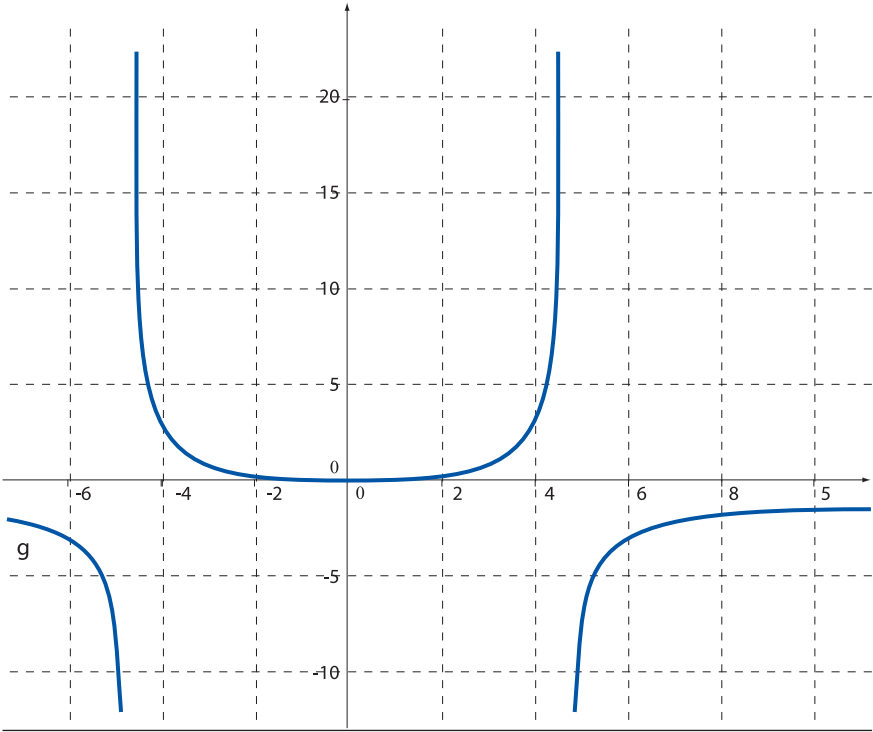



Figura 2 - Esboço do gráfico de $f(x)=\dfrac{x^2}{16-x^2}$

4. EXERCÍCIOS

1. Esboçar o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ b) $y = 3x^5 - 5x^4$

c) $y = \dfrac{9}{x^2 + 9}$ d) $y = x - \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 3}$ g) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

2. Esboce o gráfico de uma função definida para todo x real tal que

a) $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$;

b) $f(0) = 2$, $f(2) = 0$, $f'(0) = f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ para $|x - 1| > 1$, $f'(x) < 0$ para $|x - 1| < 1$, $f''(x) < 0$, para $x < 1$, $f''(x) > 0$, para $x > 1$;

c) $f(0) = 0$, $f(2) = f(-2) = 1$, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x > 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(x) > 0$, para $|x| < 2$, $f''(x) < 0$, para $|x| > 2$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

5. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo:* um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância).

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1991.

AULA 16

Formas indeterminadas e Regra de L'Hôpital

OBJETIVOS

Apresentar as formas indeterminadas dos tipos $0/0$ e ∞/∞. Enunciar e utilizar a Regra de L'Hôpital para resolvê-las. Apresentar outras formas indeterminadas (dos tipos $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞) e desenvolver, por meio de exemplos, métodos para resolvê-las.

1. INTRODUÇÃO

No cálculo de limites, podemos nos deparar com situações as quais chamamos formas indeterminadas ou, simplesmente, indeterminações. São limites cujos resultados não podemos determinar imediatamente e que, em princípio, podem resultar em números reais quaisquer, como também podem não existir (caso esse que inclui os resultados $+\infty$ ou $-\infty$). Por exemplo, aqueles que se expressam por meio de quocientes de funções que tendem a zero (ambas) ou a $\pm\infty$ (ambas), como os limites $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\ln(x)}$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}$, respectivamente. Aliás, a própria caracterização da derivada de uma função f em um ponto a, $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, se expressa por um limite indeterminado, pois tanto $f(x)-f(a)$ quanto $x-a$ tendem a zero quando $x \to a$. Como já vimos, um limite como esse que define a derivada pode existir (sendo um número real) ou pode não existir (caso esse que inclui os resultados $+\infty$ ou $-\infty$).

Algumas dessas indeterminações conseguimos resolver utilizando algum argumento próprio para os tipos de funções envolvidas. Como exemplo, temos o caso do limite de uma função racional da forma $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ em que a é raiz de ambos os polinômios $p(x)$ e $q(x)$.

Nesse caso, podemos fatorar $p(x)$ e $q(x)$ e, em seguida, cancelar os fatores comuns da forma $(x-a)$ antes de calcular o limite. Acompanhe o seguinte exemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Entretanto, esses argumentos são apropriados para funções racionais e não funcionam, em geral, para quocientes formados por outros tipos de funções que não sejam polinômios.

Veremos, a seguir, que a Regra de L'Hôpital nos ajudará a resolver indeterminações que ocorrem com quocientes de funções bem gerais e, na seção posterior, mostraremos como podemos utilizá-la na resolução de outras indeterminações envolvendo produtos ou potências.

2. REGRA DE L'HÔPITAL

Dizemos que o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ é uma:

a) forma indeterminada (ou indeterminação) do tipo $0/0$ se $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$.

b) forma indeterminada (ou indeterminação) do tipo ∞/∞ se $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$. (O sinal do primeiro limite infinito pode ser diferente do sinal do segundo limite infinito.)

Observe que, nos dois seguintes casos

1) $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ ou

2) $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$,

o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ não se configura como uma indeterminação. De fato, esse limite pode ser resolvido diretamente.[1]

NOTA: As definições acima também contemplam os limites no infinito $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

[1] $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\right)=\begin{cases}0\times 0=0, \textit{ no caso } 1)\\ \textit{ou}\\ \pm\infty\times\pm\infty=\pm\infty, \textit{ no caso } 2)\end{cases}$$

Vamos apresentar, a seguir, uma regra que, quando aplicável, nos permite resolver formas indeterminadas dos tipos 0/0 e ∞/∞. Tal regra é denominada Regra de L'Hôpital[2] (lê-se Lopital) e diz que o limite de uma forma indeterminada gerada por um quociente de funções é o limite do quociente das derivadas das respectivas funções, desde que esse último limite exista ou seja ∞ ou $-\infty$.

2.1 Regra de L'Hôpital

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis e suponha que $g'(x) \neq 0$ em uma vizinhança de $x = a$ (não é necessário que $g'(a) \neq 0$).

a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, desde que esse último limite exista ou seu resultado seja ∞ ou $-\infty$.

b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, desde que esse último limite exista ou seu resultado seja ∞ ou $-\infty$.

NOTA: Essa regra também é válida para limites laterais ($x \to a^-$ e $x \to a^+$) ou para limites no infinito ($x \to -\infty$ e $x \to +\infty$).

Uma demonstração completa dessa regra, contendo todos os casos cobertos por ela, pode ser encontrada em alguns livros de Cálculo ou Análise Matemática e utiliza uma forma mais elaborada do Teorema do Valor Médio que será estudado mais adiante neste curso de Cálculo.

Entretanto, podemos exibir uma prova mais simples para o caso em que f' e g' são contínuas, $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$.

De fato, como $f(a) = g(a) = 0$, podemos escrever para $x \neq a$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Agora, utilizando as propriedades de limite e a definição de derivada, obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[2] A Regra de L'Hôpital foi publicada, pela primeira vez, em 1696, pelo marquês de L´Hôpital, mas, embora leve seu nome, ela foi descoberta por Johan Bernoulli em 1694. Ambos tinham um acordo que dava ao marquês o direito sobre as descobertas de Bernoulli, seu antigo professor.

Vamos aplicar a Regra de L'Hôpital para resolver a indeterminação $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$, do tipo $\frac{0}{0}$, que abordamos na parte introdutória desta aula. Naquela parte, nós a resolvemos utilizando fatoração de polinômios. Agora, temos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-5}=\frac{4}{-1}=-4.$$

ATENÇÃO. A Regra de L'Hôpital somente deve ser utilizada para calcular o limite de um quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se o limite for realmente uma indeterminação. Assim, é necessário que verifiquemos que os limites de $f(x)$ e de $g(x)$ são, ambos, iguais a zero ou são, ambos, infinitos ($\pm\infty$). Por exemplo, o limite $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+5x+6}$ pode ser calculado por simples substituição: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+5x+6}=\frac{2^2+4}{2^2+(5\times 2)+6}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$. Por outro lado, calculando o limite do quociente das derivadas, obtemos $\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x+5}=\frac{2\times 2}{(2\times 2)+5}=\frac{4}{9}$, que é diferente do valor correto, calculado diretamente.

3. EXEMPLOS

3.1 Exemplo: cálculo do limite $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, pois $\lim_{x\to 1}\ln(x)=0=\lim_{x\to 1}(x-1)$. Portanto, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1.$$

3.2 Exemplo: cálculo do limite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, pois $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$. Aplicando a Regra de L'Hôpital, encontramos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}.$$

Porém, esse último limite ainda é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, uma vez que $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty}2x=\infty$. Para calculá-lo, aplicamos novamente a Regra de L'Hôpital e encontramos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$

Concluímos, então, que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$.

3.3 Exemplo: cálculo de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{p(x)}$, onde $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

Seja $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ um polinômio de grau *n*, então podemos concluir, com base no exemplo anterior, que, se aplicarmos sucessivamente a Regra de L'Hôpital ao limite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{p(x)}$, encontraremos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{p(x)}=\begin{cases}+\infty\,,\ se\ a_n>0\\-\infty\,,\ se\ a_n<0\end{cases}.$$

Por exemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5x^{14}+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5.14x^{13}+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5.14.13x^{12}+3.2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5.14.13.12x^{11}-3.2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5.14.13.12.11x^{10}}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{-5.14!}=-\infty$$

3.4 Exemplo: Consideremos, ainda, $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, um polinômio de grau *n*.

Então, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}=0$ (verifique).

3.5 Exemplo: Se $r > 0$, então o limite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^p}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, pois $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty}x^r=\infty$.

Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^r}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{-1}}{rx^{r-1}}=\dfrac{1}{r}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^r}=\dfrac{1}{r}.0=0.$ (Se $r\le 0$, então o limite acima não é uma forma indeterminada. Por quê?)

3.6 Exemplo: o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x)}{x^3}$

O limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x)}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ (verifique). Mas, ao aplicarmos a Regra de L'Hôpital, nos deparamos novamente com outra indeterminação do mesmo tipo (verifique isso também). Daí, mais uma aplicação da Regra de L'Hôpital é suficiente, nesse caso:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cos(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-cos(x)}{6x}=\lim_{x\to 0^+}(-cos(x))\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{6x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-\infty$$

3.7 Exemplo: o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan\,x-x}{x^3}$

O limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan\,x-x}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. E, como você pode verificar acompanhando o desenvolvimento a seguir, teremos que aplicar L'Hôpital sucessivas vezes – cada uma delas sinalizada por $\overset{L'H}{=}$ e correspondente a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ – até conseguirmos resolver a última indeterminação:[3]

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)-x}{x^3}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{sec^2(x)-1}{3x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\,sec(x)\,sec(x)\,tan(x)}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sec^2(x)\,tan(x)}{x}$$

$$\overset{L'H}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\,sec(x)\,sec(x)\,tan(x)\,tan(x)+sec^2(x)\,sec^2(x)}{1}$$

$$=\frac{1}{3}\left[2\lim_{x\to 0}sec^2(x)\,tan^2(x)+\lim_{x\to 0}sec^4(x)\right]=\frac{1}{3}(2.0+1)=\frac{1}{3}.$$

[3] Lembre-se que $[sec(x)]'=sec(x)\,tan(x)$ e que $[tan(x)]'=sec^2(x)$.

4. OUTRAS FORMAS INDETERMINADAS: $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 E 1^∞.

Além das formas indeterminadas acima estudadas, existem as do tipo $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞. Veremos, por meio de exemplos, que essas formas indeterminadas podem ser resolvidas, em muitas situações, pela Regra de L'Hôpital após algum artifício algébrico que as transforma em uma das formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

4.1 Exemplo: cálculo de $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$ é uma forma indeterminada do tipo $0.\infty$, uma vez que $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Podemos reescrever essa indeterminação em outra do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e resolvê-la por L'Hôpital. Acompanhe:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

4.2 Exemplo: cálculo de $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Porém, escrevendo $x^x = e^{x\ln(x)}$, podemos resolver essa indeterminação utilizando a continuidade[4] da função exponencial e o resultado do exemplo anterior. Veja, a seguir:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

4.3 Exemplo: o limite $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

O limite $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ é uma forma indeterminada do tipo ∞^0. Para resolvê--la, escrevemos $x^{1/x} = e^{(1/x)\ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ e, novamente, utilizamos a continuidade da função exponencial e transferimos o limite para o expoente da base e. Acompanhe:

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{(1/x)\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1}} = e^0 = 1.$$

(Observe que a indeterminação $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$, do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, foi resolvida[5] por L´Hôpital.)

[4] Se *f é contínua em* $c = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to a} g(x)) = f(c)$. No caso, $f(y) = e^y$, $g(x) = x\ln(x)$, $a = 0^+$ e $c = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

[5] $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$

4.4 Exemplo: o limite $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{1/x}$, sendo a um número real qualquer

Vamos calcular o limite $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{1/x}$, sendo a um número real qualquer. Tal limite é uma forma indeterminada do tipo 1^{∞}. Mas:

$$\lim_{x \to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{x \to 0} e^{(1/x)\ln(1+ax)} = e^{\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}}.$$

Agora, resolvendo por L'Hôpital , obtemos a forma indeterminada

$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$, do tipo $\frac{0}{0}$, encontramos

$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{(1+ax)^{-1}a}{1} = a\lim_{x \to 0}\frac{1}{1+ax} = a$. Logo,[6]

$$\lim_{x \to 0}(1+ax)^{1/x} = \lim_{x \to 0} e^{(1/x)\ln(1+ax)} = e^{\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^{a}.$$

5. EXERCÍCIOS

Calcule os limites:

1. $\lim_{x \to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}$. Resposta: $-\infty$
2. $\lim_{x \to 0}\frac{sen(x)-x}{x^3}$. Resposta: $-\frac{1}{6}$
3. $\lim_{x \to \infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$. Resposta: 0.
4. $\lim_{x \to \infty} x\, tan(\frac{1}{x})$. Resposta: 1.
5. $\lim_{x \to 0}(1-2x)^{1/x}$. Resposta: e^{-2}.
6. $\lim_{x \to 0}\frac{tan(px)}{tan(qx)}$, $q \neq 0$. Resposta: $\frac{p}{q}$.
7. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^x$. Resposta: 0.
8. $\lim_{x \to 0^+}\sqrt{x}\ln(x)$. Resposta: 0.

[6] Observe, no caso de $a = 1$, obtemos uma expressão para o número e: $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}$.

9. $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$. Resposta: 0.

10. $\lim_{x \to 0^+} sen(x)\ln(x)$. Resposta: 0.

11. $\lim_{x \to 0^+} [tan(2x)]^x$. Resposta: 1.

12. $\lim_{x \to \infty} (x - \ln(x))$. Resposta: ∞.

13. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

14. $\lim_{x \to 0} \frac{x + tan(x)}{sen(x)}$. Resposta: 2.

15. $\lim_{x \to 0^+} (cos\, x)^{1/x^2}$. Resposta: $e^{-1/2}$.

16. $\lim_{x \to 0} \frac{x - arctanx}{x - senx}$. Resposta: 2.

17. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$. Resposta: e^{ab}.

18. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$. Resposta: e^{-1}.

19. $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$. Resposta: e.

20. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$. Resposta: e^{-8}.

21. $\lim_{x \to 0^+} (x)^{p/\ln(x)}$. Resposta: e^p.

22. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{senx}\right)$. Resposta: 0.

23. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{tan\, x}{tan(3x)}$. Resposta: 3.

24. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (senx)^{tan\, x}$. Resposta: 1.

25. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{2x+3}$. Resposta: 0.

26. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Resposta: -1.

AULA 17

Ainda traçando gráficos

OBJETIVO
Utilizar os conceitos estudados para esboçar gráficos de funções.

1. INTRODUÇÃO

Prosseguimos traçando gráficos de funções reais, desenvolvendo nesta aula quatro outros exemplos.

2. EXEMPLOS

2.1 Esboce o gráfico de $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1- O domínio é o conjunto dos números reais, porque $x^2+1>0$ sempre. A função é contínua em seu domínio e não há, portanto, assíntotas verticais.

2- Veja que $f(-x)=\dfrac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$. Isso quer dizer que a função é ímpar e, portanto, há simetria em relação à origem.

3- O gráfico da função passa pela origem do sistema de coordenadas, porque $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

4- Quanto a assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=-1\,.$$

5- Calculando a derivada,

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-x\left[\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}.2x\right]}{x^2+1}.$$

Simplificando a expressão, obtemos

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Veja que a derivada é sempre positiva, e não se anula nunca. Portanto, não há pontos críticos, e a função é sempre crescente.

6- Calculando a derivada segunda pela Regra da Cadeia:

$$f''(x)=-\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}.2x=-x\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Veja que $x=0$ é candidato à inflexão.

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$-x$	>0	<0
$\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$	>0	>0
$f''(x)$	>0	<0
$f(x)$	Côncava para cima	Côncava para baixo

Da análise da concavidade, concluímos que $x=0$ é ponto de inflexão. O gráfico está esboçado a seguir.

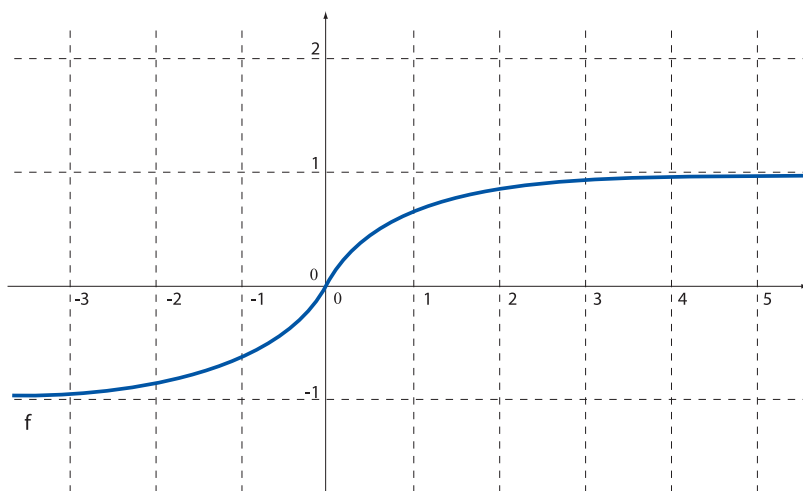



Figura 1 - Gráfico da função $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

2.2 Esboce o gráfico de $y = xe^x$.

1- O domínio é o conjunto dos números reais. A função é contínua e, portanto, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

2- A função não é nem par nem ímpar, porque

$f(-x) = (-x)e^{(-x)} \neq f(x)$

$f(-x) = (-x)e^{(-x)} \neq -f(x)$. Assim, não há simetria em relação à origem ou ao eixo y.

3- Interseção com eixos se dá quando $y = xe^x \Leftrightarrow xe^x = 0$. Isso acontece apenas quando $x = 0$, porque $e^x \neq 0$, sempre.

4- Assíntotas horizontais são identificadas com o cálculo dos limites a seguir:

$\lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$, porque ambos os fatores – x e e^x – crescem indefinidamente quando $x \to +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$. A reescrita foi necessária porque o limite resultava numa indeterminação do tipo $0.\infty$.

Utilizando a Regra de L' Hôpital, $\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$.

Assim, o eixo $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

5- Análise dos pontos críticos será feita a partir da derivada

$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$.

Uma vez que $e^x > 0$, zeros e sinais da derivada serão determinados pela expressão $(1 + x)$. Assim, $y' = e^x(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, que é o único ponto crítico da função.

Uma vez que

$y' = e^x(1 + x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$, a função é decrescente em $(-\infty, -1)$;

$y' = e^x(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$, a função é crescente em $(-1, +\infty)$.

A função passa de decrescente para crescente em $x = -1$ e então esse ponto é um ponto de mínimo local.

6- Para a análise de inflexões e concavidade, calculamos:

$y'' = e^x + e^x(1 + x) = e^x(2 + x)$

Do mesmo modo que na análise da derivada primeira, $e^x > 0$ e zeros e sinais da derivada segunda serão determinados pela expressão $(2 + x)$. Assim, $y' = e^x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, que é o único candidato a ponto de inflexão.

Uma vez que

$y' = e^x(2+x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$, a função é côncava para baixo em $(-\infty, -2)$;

$y' = e^x(2+x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$, a função é côncava para cima em $(-, +\infty)$.

Assim, $x = -2$ é ponto de inflexão.

Na tabela a seguir, os valores da função em seu extremo e ponto de inflexão. Em seguida à tabela, o esboço do gráfico.

x	$f(x)$
0	0
-1	$-e^{-1}$
-2	$-2e^{-2}$

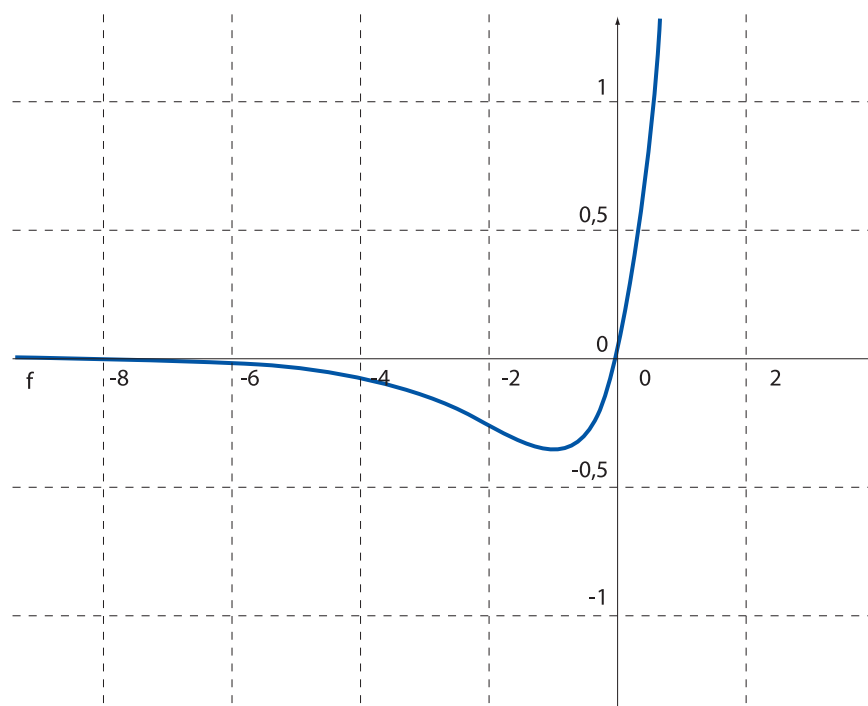



Figura 2 - Gráfico da função $y = xe^x$

2.3 Esboce o gráfico de $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

1- O domínio da função é $(0,+\infty)$, porque $y = \ln x$ só está definida nesse intervalo. A condição $x \neq 0$ para o denominador está satisfeita nesse intervalo.

2- A função é contínua em $(0,+\infty)$. Uma assíntota vertical pode acontecer em $x = 0$. Calculando $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, confirmamos que $x = 0$ é de fato uma assíntota vertical.

Para o cálculo de $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, podemos utilizar a Regra de L'Hôpital porque estamos com uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$; e, portanto, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

3- Interceptos correspondem a soluções de $\dfrac{\ln x}{x} = 0$. Estas acontecem apenas quando $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

4- Encontrando a derivada primeira de $y = \dfrac{\ln x}{x}$ para identificação de extremos e regiões de crescimento:

$$y' = \frac{\left(1/x\right).x - \ln x}{x^2} \text{ e } y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Veja que $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$. Isso quer dizer que $y' > 0$ em $(0,e)$, o que significa que a função é crescente nesse intervalo. Em $(e,+\infty)$, a derivada é negativa e, portanto, a função é decrescente no intervalo. O ponto crítico $x = e$ é então um ponto de mínimo local.

5- Analisando a derivada segunda:

$$y'' = \frac{-\left(1/x\right).x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x(3 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3};$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Em $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, temos $y'' < 0$ e a concavidade é para baixo. Em $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, temos $y'' > 0$ e a concavidade é para cima. Então $x = e^{\frac{3}{2}}$ é ponto de inflexão.

Na tabela a seguir, os valores da função em seus extremos, inflexões e interceptos.

x	$f(x)$
1	0
e	e^{-1}
$e^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}.e^{-\frac{3}{2}}$

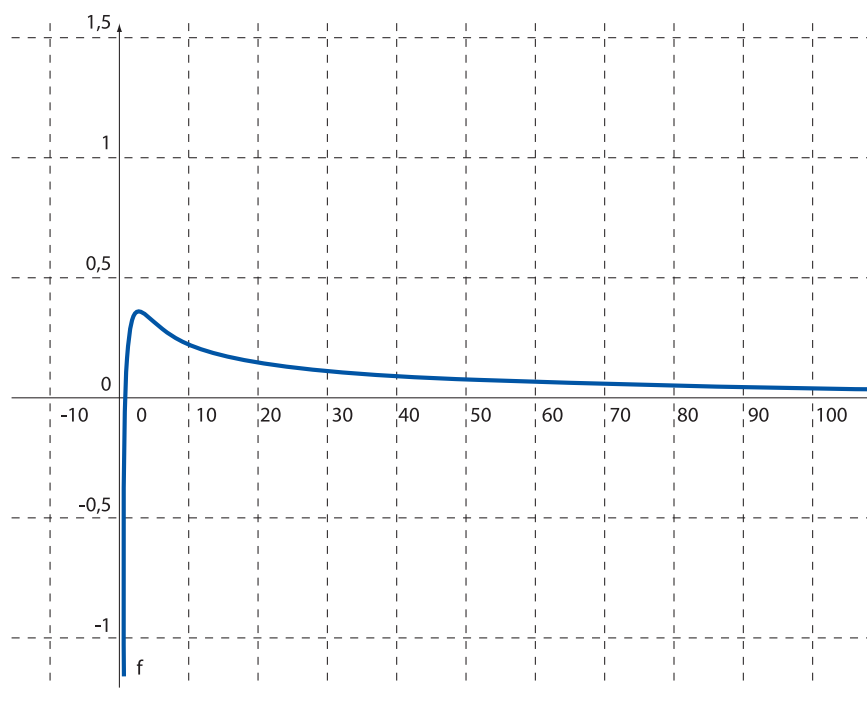



Figura 3 - Gráfico da função $y = \dfrac{\ln x}{x}$

2.4 Esboço do gráfico de $f(x) = 2\cos x + sen2x$, no intervalo $[0,2\pi]$

1- A função está definida e é contínua em $[0,2\pi]$. Portanto, não há assíntotas verticais.

2- Não há simetrias em relação ao eixo y e à origem.

Isso porque $f(-x) = 2\cos(-x) + sen2(-x) = 2\cos x - sen2x$, cuja expressão não coincide com a expressão de $f(x)$ nem com a de $-f(-x)$, o que quer dizer que a função $f(x) = 2\cos x + sen2x$ não é par nem ímpar.

3- Interseção com o eixo y acontece em $y = f(0) = 2\cos 0 + sen0 = 2$. Interseção com o eixo x acontece quando $2\cos x + sen2x = 0$, ou seja, quando $\cos x(2 + 2senx) = 0$. Resolvendo, $\cos x = 0$ ou $(2 + 2senx) = 0$; e, no intervalo $[0,2\pi]$, a solução é $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

4- A derivada da função é $f'(x) = -2senx + 2\cos 2x$.

Reescrevendo a expressão, chegamos a

$$f'(x) = -2senx + 2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right) = -2senx + 2\left(1 - 2sen^2 x\right).$$

No Exemplo 6.3 da Aula 14, determinamos os pontos críticos, ou seja, os zeros de $f'(x)$, que são os valores $x = \dfrac{\pi}{6}$ e $x = \dfrac{5\pi}{6}$ (que correspondem a $senx = \dfrac{1}{2}$, no intervalo $[0,2\pi]$) e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ (que corresponde a

$senx = -1$, no intervalo $[0,2\pi]$). Pelo teste da derivada segunda, obtivemos $x = \dfrac{\pi}{6}$ é um mínimo local e $x = \dfrac{5\pi}{6}$ é um máximo local.

No caso de $x = \dfrac{3\pi}{2}$, o teste falha, ou seja, nada podemos afirmar.

A análise do sinal da derivada será feita referenciada na análise do sinal de $-4sen^2x - 2senx + 2 = 0$, interpretada como a equação de segundo grau $4m^2 + 2m - 2 = 0$ que já resolvemos.

Intervalo	$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
$-4sen^2x - 2senx + 2$	<0	>0	>0	<0
$f'(x)$	<0	>0	>0	<0
$f(x)$	decrescente	crescente	crescente	decrescente

Assim, $x = \dfrac{\pi}{6}$ é ponto de mínimo local e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ é ponto de mínimo local.

5- Para a análise da concavidade e inflexões, encontramos:

$$f''(x) = -2\cos x - 8senx\cos x = 2\cos x(-1 - 4senx)$$

e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $senx = -\dfrac{1}{4}$. Esses valores correspondem a $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ e $x = arcsen\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ e $x = \dfrac{3\pi}{2} + arcsen\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, que

são candidatos a inflexões. Na tabela a seguir, a análise da concavidade e dos pontos de inflexão.

Intervalo	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},arcsen\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$	$\left(arcsen\left(-\frac{1}{4}\right),\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}+arcsen\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}+arcsen\left(-\frac{1}{4}\right),2\pi\right)$
$\cos x$	>0	<0	<0	>0	>0
$-1-4senx$	<0	<0	>0	>0	<0
$f''(x)$	<0	>0	<0	>0	<0
$f(x)$	Côncava para baixo	Côncava para cima	Côncava para baixo	Côncava para cima	Côncava para baixo

Assim, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$ e $x=arcsen\left(-\frac{1}{4}\right)$ e $x=\frac{3\pi}{2}+arcsen\left(-\frac{1}{4}\right)$ são todos pontos de inflexão.

A seguir, o esboço do gráfico de $f(x)=2\cos x+sen2x$, no intervalo $[0,2\pi]$.

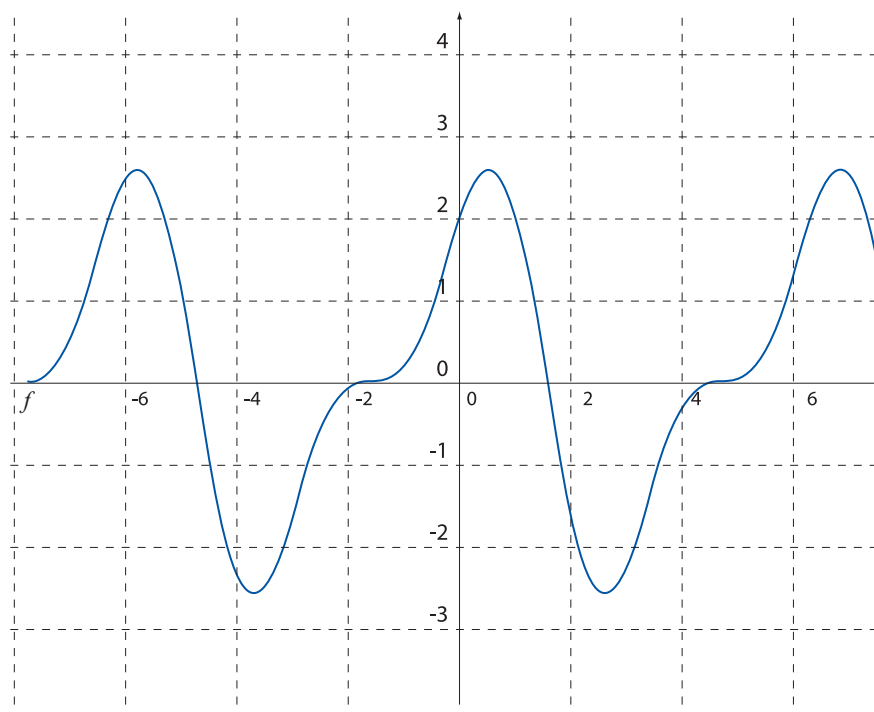



Figura 4 - Gráfico da função $f(x)=2\cos x+sen2x$, no intervalo $[0,2\pi]$

3. EXERCÍCIOS

1. Esboce os gráficos das funções a seguir:

a) $f(x)=2senx+\cos 2x$, no intervalo $[0,2\pi]$

b) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(1+x)$

c) $y=\frac{e^x}{x}$

d) $f(x)=x\ln x$

2. Simplifique $f(x)=\frac{x-1}{1-x^2}$, e esboce seu gráfico. Idem, para $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$.

4. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo:* um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1991.

AULA 18

Problemas de otimização

OBJETIVO
Exibir técnicas que são utilizadas para encontrar valores máximos e/ou mínimos de funções, bem como os pontos em que esses valores ocorrem.

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento de valores máximos ou mínimos das funções envolvidas em um modelo matemático é um aspecto relevante em várias das aplicações do Cálculo. Por exemplo, se o lucro obtido com a fabricação e a venda de x unidades de um produto é dado por uma função $L(x)$, formada a partir das receitas (várias formas de venda do produto), dos custos fixos (aluguel, impostos etc.) e dos custos variáveis (energia elétrica, água, insumos), então é de interesse do fabricante conhecer as situações em que seu lucro é máximo ou suas despesas são mínimas, de acordo com a quantidade de produto que ele fabrica ou pode fabricar. O conhecimento dessas situações permite que decisões sejam tomadas e estratégias sejam formuladas, a bem do negócio.

Podemos citar outros exemplos simples, que aparecem com frequência nos primeiros cursos de Cálculo:

a) encontrar as dimensões de uma caixa de base quadrada (uma embalagem) com dado volume de modo a minimizar a quantidade de material (área lateral) a ser utilizado para construí-la;

b) determinar o deslocamento máximo de um objeto quando lançado em uma dada direção com certa velocidade inicial e sobre a ação de seu próprio peso e de uma força de resistência;

c) determinar a maior área retangular que se pode cercar com uma quantidade determinada de arame.

Problemas desse tipo, que têm como objetivo principal a determinação de valores máximos ou mínimos, são chamados de problemas de otimização. Muitos deles são formulados matematicamente da seguinte

forma. Uma função derivável $f(x)$ é definida para todo x em certo intervalo I e deseja-se determinar, caso existam, os valores máximo absoluto $M = f(x_M)$ e mínimo absoluto $m = f(x_m)$, bem como os respectivos pontos, x_M e x_m, em que eles são atingidos.

2. MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS FECHADOS

Nesta seção, admitindo que a função $y = f(x)$ seja derivável[1] em um intervalo fechado $[a,b]$, vamos desenvolver nosso primeiro e mais simples método para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos da função, bem como os pontos em que eles ocorrem.

A continuidade de f em $[a,b]$ (f é derivável!) garante que ambos os valores, máximo e mínimo absolutos, existem.

O método consiste em encontrar os extremos locais da função f e compará-los com os valores $f(a)$ e $f(b)$. Como os extremos locais são atingidos em pontos críticos[2] de f, devemos encontrar todos os pontos críticos da função no intervalo aberto (a,b). Em seguida, formamos duas listas X e Y. Na lista X, colecionamos os pontos críticos juntamente com os pontos a e b (extremidades do intervalo). Na lista Y, colecionamos os valores da função calculados nos pontos da primeira lista (observe que entre estes estarão $f(a)$ e $f(b)$).

O maior valor da lista Y será o *valor máximo absoluto de f*, enquanto o menor valor dessa lista será o *valor mínimo absoluto de f*. Além disso, os pontos em que esses valores ocorrem são o(s) ponto(s) de máximo absoluto e o(s) ponto(s) de mínimo absoluto e podemos identificá-los na lista X.

2.2 Um Método para Encontrar Máximos e Mínimos em um Intervalo Fechado

Seja $y = f(x)$ derivável em um intervalo fechado $[a,b]$. Se M e m denotam, respectivamente, os valores máximo e mínimo absolutos de f, e se

$$X = \{c \in (a,b) \mid f'(c) = 0\} \cup \{a,b\} \quad \text{e}$$

$$Y = \{f(c) \mid c \in (a,b)\} \cup \{f(a), f(b)\},$$

então, $M = \max Y$ e $m = \min Y$.

[1] As derivadas em $x = a$ e em $x = b$ são as derivadas laterais.

[2] Lembre-se que c é um ponto crítico se $f'(c) = 0$.

Vamos utilizar a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$ para exemplificar o método, calculando seus valores máximo e mínimo absolutos, bem

como os pontos em que eles ocorrem, no intervalo $[-2,3]$.

Temos $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)$. Logo, para encontrar os pontos críticos de *f*, devemos resolver a equação $12x(x^2-x-2)=0$, a qual, depois de dividir ambos os lados por 12, fica equivalente a $x(x^2-x-2)=0$. Vemos, de imediato, que $c_1=0$ é uma raiz dessa equação e que as outras são as raízes de $x^2-x-2=0$. Calculando-as, encontramos $c_2=-1$ e $c_3=2$. Portanto, os pontos críticos de *f* são: $c_1=0$, $c_2=-1$ e $c_3=2$. Podemos, então, formar as listas *X* e *Y*. Vamos dispô-las na seguinte tabela:

Tabela 1

X	*-2*	*-1*	*0*	*2*	*3*
Y	*47*	*10*	*15*	*-17*	*42*

Portanto, podemos concluir que:

- $m = -17$ é o valor mínimo absoluto de *f* no intervalo $[-2,3]$, atingido no ponto $x_m=2$, e
- $M = 47$ é o valor máximo absoluto de *f* no intervalo $[-2,3]$, atingido no ponto $x_M=-2$.

Observe que o valor máximo absoluto é atingido em um ponto crítico, enquanto que o mínimo absoluto é atingido no extremo esquerdo do intervalo. Veja, na Figura 1, abaixo, o gráfico da função $y=3x^4-4x^3-12x^2+15$ no intervalo $[-2,3]$, bem como seus extremos locais e absolutos.

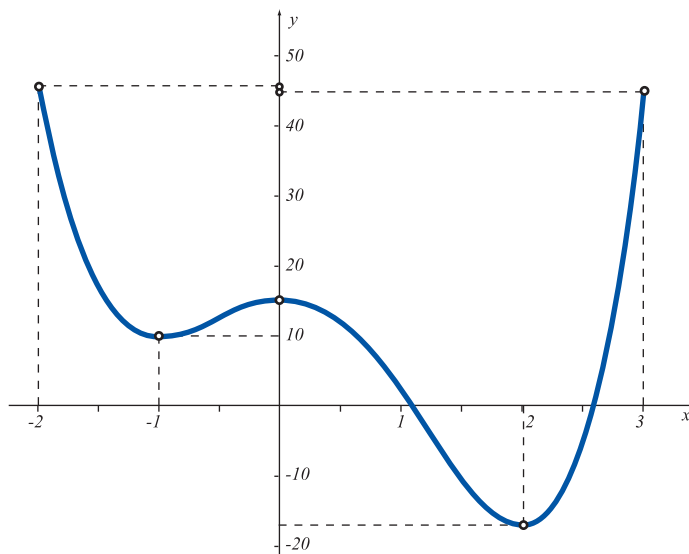



Figura 1 - Gráfico de $y=3x^4-4x^3-12x^2+15$ em $[-2,3]$ e seus extremos locais e absolutos

Exemplo 1.[3] Uma caixa sem tampa deve ser construída dobrando-se pequenos quadrados de lado x *cm* em uma folha de papel quadrada de 12 *cm* de lado (veja figura abaixo). Qual deve ser o comprimento x para que a caixa tenha capacidade (volume) máxima? Qual é essa capacidade?

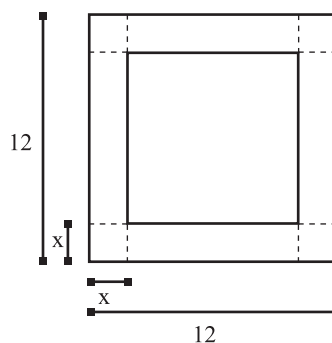



Figura 2 - Quadrados de lado x *cm* em uma folha de papel quadrada

Resolução. Vamos denotar por $V(x)$ o volume da caixa. Então, $V(x)=(12-2x)^2x$ uma vez que a altura da caixa será x e sua base será um quadrado de lado $(12-2x)$. Os valores de x devem variar no intervalo $[0,6]$.

Reescrevendo: $V(x)=4(6-x)^2x$ e, aplicando a regra do produto (juntamente com a regra da cadeia para derivar $(6-x)^2$), encontramos:

$$V'(x)=4[2(6-x)(-1)x+(6-x)^2(1)]=4(6-x)[-2x+(6-x)]=4(6-x)(6-3x)=12(6-x)(2-x).$$

Assim, resolvendo $(6-x)(2-x)=0$, encontramos os pontos críticos $c_1=2$ e $c_2=6$. Agora, montamos a tabela cuja linha X é constituída dos pontos críticos, juntamente com os extremos *0* e *6* do intervalo em questão, e a linha V dos valores do volume nesses pontos.

Tabela 2

X	*0*	*2*	*6*
V	$V(0)=0$	$V(2)=128$	$V(6)=0$

Inspecionando a Tabela 2, vemos, imediatamente, que o valor máximo para o volume é *128* cm^3 e ocorre quando x é *2 cm*.

Exemplo 2. Determinar as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito num semicírculo de raio R.

[3] Ver Thomas. *Cálculo*.

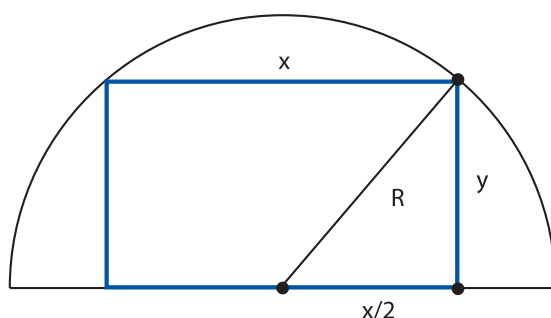



Figura 3 - Retângulo inscrito num semicírculo de raio *R*

Resolução. Se x e y são as dimensões do retângulo, então $R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2$ (Teorema de Pitágoras). Assim, $y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ e a área do retângulo será $A(x) = x\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$, para $x \in [0,2R]$. Para encontrar ponto(s) crítico(s), devemos derivar a função A:

$$A'(x) = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\right) = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}}\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}}\left(R^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right),$$

ou seja, $A'(x) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}}\left(R^2 - \frac{x^2}{2}\right)$.

Resolvendo a equação $A'(x) = 0$, encontramos $x = \pm R\sqrt{2}$. Desses dois valores, o único que está no intervalo aberto $(0,2R)$ é $c = R\sqrt{2}$.
O valor da área para esse ponto crítico é

$$A(R\sqrt{2}) = R\sqrt{2}\sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4}} = R\sqrt{2}\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = R^2.$$

Tabela 3

X	0	$R\sqrt{2}$	$2R$
A	$A(0)=0$	$A(R\sqrt{2})=R^2$	$A(2R)=0$

Observando a Tabela 3, percebemos que o valor máximo (absoluto) da área é R^2 e esse valor ocorre quando as dimensões são $x = R\sqrt{2}$ e

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

(y é a metade de x!).

3. MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS NÃO FECHADOS

A seguir, vamos resolver um problema de otimização cuja função a ser otimizada está definida em um intervalo que não é fechado. Em situações como essa, podemos recorrer a uma análise do crescimento da função para a determinação da natureza (máximo ou mínimo) de cada ponto crítico encontrado.

Alternativamente, podemos utilizar o teste da derivada segunda para essa determinação. Nesse caso, devemos analisar a existência do extremo procurado e, eventualmente, considerar a possibilidade de existirem dois ou mais pontos com a mesma natureza, caso em que devemos aprofundar a análise da função.

Exemplo 3. Um reservatório de base quadrada e sem tampa deve ser construído com a capacidade de armazenar um volume de *32 m³* de água. Determine as dimensões desse reservatório que minimizam a quantidade de material a ser usado para construí-lo.

Resolução. Se denotarmos a dimensão da base (quadrada) do reservatório por x e sua altura por h, então encontraremos que sua área lateral (sem a tampa) é dada por $A = x^2 + 4(xh)$, correspondendo à área do fundo somada com as áreas das 4 faces laterais. Como essa expressão depende de duas variáveis, x e h, devemos encontrar uma relação entre ambas de modo que possamos expressar a área lateral como função de apenas uma dessas variáveis. Para isso, utilizamos a informação dada de que o volume do reservatório é de $32\ m^3$. Mas, como esse volume é dado por x^2h (área da base multiplicada pela altura), encontramos a relação pretendida: $32 = x^2h$. Portanto, encontramos a área lateral como a seguinte função $A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{32}{x^2}\right) = x^2 + \frac{128}{x}$, definida[4] para $x \in (0, \infty)$.

A dimensão x_m que deve minimizar a função área lateral $A(x)$, se existir, deve estar entre os pontos críticos dessa função, uma vez que x_m será, também, um ponto de mínimo local.

Derivando a função $A(x)$, encontramos $A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$. Daí decorre que a equação de ponto crítico é $2x - \frac{128}{x^2} = 0$ ou, equivalentemente, $x^3 = 64$. A solução dessa equação é $x = 4$. Esse é o único ponto crítico da função $A(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ $x \in (0, \infty)$ e, para decidirmos se ele é, de fato, ponto de mínimo absoluto, podemos analisar o crescimento da função à esquerda e à direita desse ponto. Da expressão $A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$ para a

[4] Observe que podemos tomar x tão grande quanto quisermos, bastando, para isso, que tomemos h tão pequeno, tal que $h = \frac{32}{x^2}$.

derivada de $A(x)$, vemos que $A'(x) < 0$ se $x < 4$ e que $A'(x) > 0$ se $x > 4$. Isso significa que a função $A(x)$ é estritamente decrescente à esquerda do ponto crítico $x = 4$ e estritamente crescente à direita desse ponto crítico. Dessa forma,[5] confirmamos que $x = 4$ é, de fato, o ponto de mínimo absoluto da função $A(x)$. Concluímos que as dimensões que minimizam a área lateral do reservatório (sem a tampa) são $x_m = 4m$ e $h_m = \frac{32}{(x_m)^2} = \frac{32}{16} = 2m$ (a unidade só pode ser metro, pois o volume foi dado em metros cúbicos).

Uma pequena discussão sobre o teste da derivada segunda. Você pode observar no problema do exemplo anterior que $A''(x) = 2 + 2\left(\frac{128}{x^3}\right)$ e $A''(4) = 6 > 0$. Assim, o teste da derivada segunda mostra que o *ponto crítico* $x = 4$ é um ponto de mínimo *local.* Sendo esse o único crítico, poderíamos ter utilizado esse teste para obtermos a mesma conclusão do problema. Isso porque, se o mínimo absoluto fosse atingido em outro ponto do intervalo $(0, \infty)$, então esse ponto seria crítico e teria que ser $x = 4$. Se, por outro lado, não houvesse, de fato, um mínimo absoluto, então a função assumiria valores menores do que $A(4)$. Mas, como $A(4)$ é mínimo local, a função também assume valores maiores do que $A(4)$. Sendo assim, o gráfico da função subiria a partir da altura $A(4)$ e depois desceria para atingir alturas menores que $A(4)$. Isso significa que o gráfico passaria por algum ponto de máximo local, o qual ocorreria, obrigatoriamente, em um ponto crítico. Mas, o único ponto crítico é $x = 4$ e, como vimos, $A(4)$ é um mínimo local e não um máximo local.

4. EXERCÍCIOS

1. Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, definida no intervalo [–4, 2].

2. Deseja-se escavar um túnel entre os pontos *A* e *B*. Este último está *30m* abaixo e *200m* à direita de *A* (veja figura abaixo). Acima da horizontal *AC,* o solo é constituído de terra e dessa horizontal o solo é rochoso. Sabe-se que o metro da escavação de terra custa R$1.000,00 e de rocha R$3.000,00. Determine até que ponto deve-se escavar na terra para que o custo do túnel seja o menor possível.

[5] Pois, $A(x) > A(4)$ tanto para $x < 4$ quanto para $x > 4$.

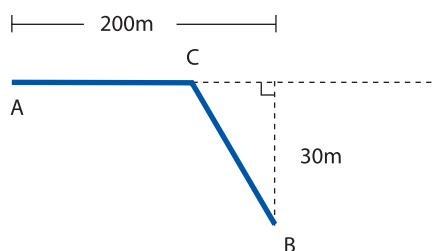



Figura 4 - Túnel entre os pontos *A* e *B*

3. Um arame de comprimento ℓ deve ser cortado em dois pedaços, um para formar um quadrado e outro para formar um círculo. Como deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja:

a) Máxima b) Mínima

4. Uma pessoa está no ponto A da margem de um rio e deseja chegar ao ponto B na margem oposta (ver figura abaixo). Sabendo que pode se deslocar na margem a uma velocidade de *10m/s* e na água a uma velocidade de *5m/s*, determine o ângulo, α , necessário para cruzar o rio de modo que o ponto B seja alcançado no menor tempo possível. Sabe-se que a distância entre A e B é *500m* e a largura do rio é *300m*.

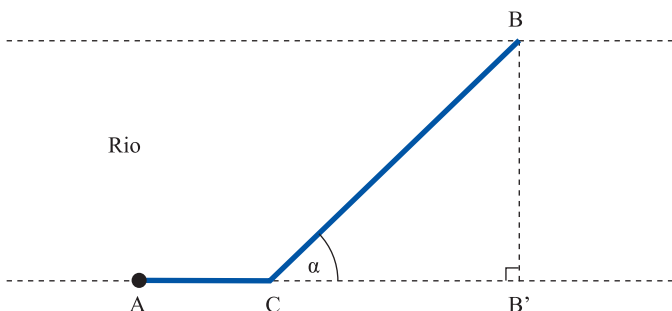



Figura 5

5. Determine o raio e a altura do cilindro de maior volume possível que pode ser inscrito em uma esfera de raio *r*.

6. Uma escada deve ser estendida sobre uma cerca de *36dm* de altura até uma parede situada a *6 dm* atrás da cerca. Qual é o comprimento da menor escada que pode ser usada?

7. A área do piso de uma loja retangular é $315m^2$. De suas quatro paredes de mesma altura, as três laterais devem ser de tijolos e a da frente de vidro. O metro quadrado da parede de vidro custa o dobro do preço do metro quadrado da parede de tijolos. Quais as dimensões da loja que minimizarão o custo total de material das paredes e da frente?

8. Uma pessoa em um ponto A da praia de um lago circular com raio igual a *2km* quer chegar ao ponto C, diametralmente oposto (ver figura abaixo) no menor tempo possível. Suponha que a velocidade dessa pessoa andando seja de *4km/h* e remando seja de *2km/h*. Determine o valor do ângulo α .

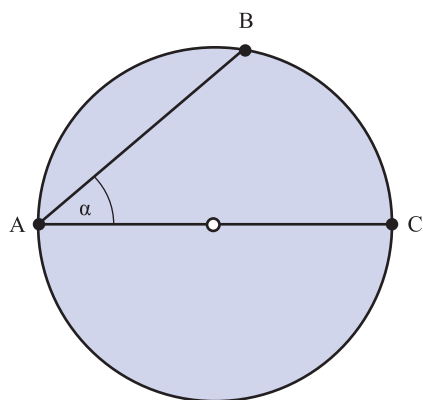



Figura 6 - Determinando α

AULA 19

O Teorema do Valor Médio

OBJETIVOS
Enunciar, demonstrar e utilizar o Teorema do Valor Médio.

1. INTRODUÇÃO

O tema desta aula refere-se a um teorema central no desenvolvimento teórico do Cálculo, chamado Teorema do Valor Médio.

Por meio do Teorema do Valor Médio, vamos justificar na próxima aula o teste da derivada primeira e o teste da derivada segunda, que utilizamos no traçado de gráficos e problemas de otimização. Além disso, por meio desse teorema, vamos estabelecer também relações entre funções que possuem a mesma derivada, explorando seu significado geométrico e algébrico.

No enunciado do Teorema do Valor Médio, as duas primeiras hipóteses sobre a função $y = f(x)$ são as mesmas de um outro teorema do qual ele é uma aplicação, o Teorema de Rolle: $y = f(x)$ deve ser uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, e diferenciável em (a,b). No entanto, não se exige mais a condição $f(a) = f(b)$.

A novidade que o Teorema do Valor Médio traz diz respeito a uma outra forma pela qual podemos perceber o Teorema de Rolle. Esse novo olhar será nosso ponto de partida nesta aula.

2. O TEOREMA DE ROLLE

Não há garantias incondicionais para que os números críticos existam. No entanto, podemos enunciar condições suficientes para sua existência.

Por exemplo, explore na Figura 1 os gráficos de funções contínuas em intervalos da reta, que esboçamos, então, sem tirar o lápis do papel.

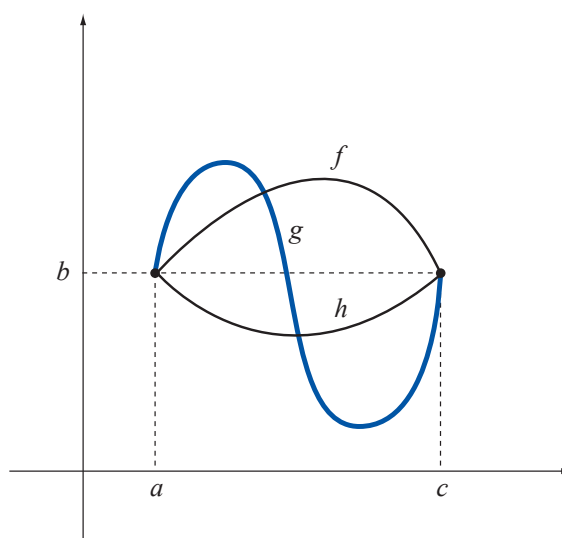



Figura 1 - Gráficos de funções contínuas ligando dois pontos a mesma altura

Mais do que contínuas, as funções representadas na figura admitem derivada em todos os pontos. Ou seja, o esboço de seu gráfico é suave, sem “esquinas” ou “bicos”, o que quer dizer que admite retas tangentes em todos os seus pontos.

Além de contínuas e diferenciáveis, as funções representadas na Figura 1 satisfazem a uma terceira condição: têm ordenadas y iguais nos extremos $x = a$ e $x = b$ do intervalo $[a, b]$ de sua definição.

Tente fazer esboços de gráficos de funções que satisfazem as três condições enunciadas! A proposta é ligar, sem tirar o lápis do papel, e sem fazer quinas e bicos, dois pontos que estão a uma mesma altura em relação a um sistema de coordenadas, como representado na Figura 2.

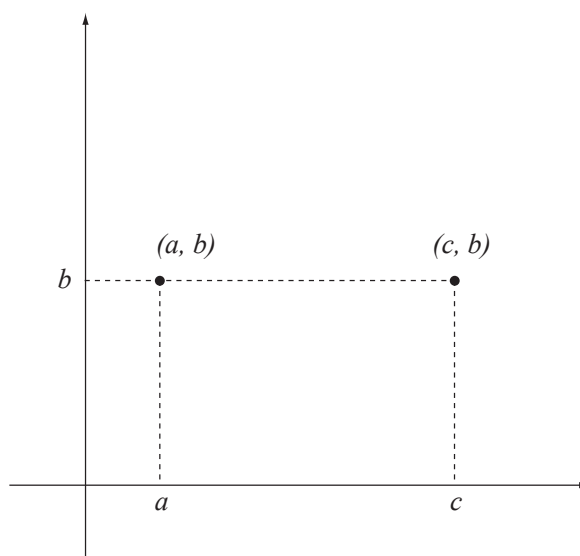



Figura 2 - Ligando pontos sem tirar o lápis do papel

Sintetizando em linguagem matemática, estamos afirmando que: se f satisfaz as três condições anunciadas, então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Para conferir essa afirmação, observe a função f que você desenhou, e veja se ela se enquadra em um dos três casos:

1) f é constante em $[a,b]$, ou seja, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a,b)$. Nesse caso, $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ e então todo número $x = c$ em (a,b) é um número crítico.

2) $f(x) > f(a)$ para algum $x \in (a,b)$, o que quer dizer que o valor máximo da função em $[a,b]$ é maior do que $f(a)$ (e $f(b)$) e ocorre em um número $c \in (a,b)$. Como f tem derivada em todos os pontos de (a,b), em linguagem matemática, podemos escrever que $f'(c) = 0$.

3) $f(x) < f(a)$ para algum $x \in (a,b)$; o que quer dizer que o valor mínimo da função em $[a,b]$ é menor do que $f(a)$ (e $f(b)$) e ocorre em um número $c \in (a,b)$. Como f tem derivada em todos os pontos de (a,b), em linguagem matemática, escrevemos que $f'(c) = 0$.

Esses três casos discutidos acima compõem o argumento que demonstra o Teorema de Rolle, que vamos enunciar a seguir:

2.1 Teorema de Rolle

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, diferenciável em (a,b). Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um número $x = c$ em (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

3. O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Explore novamente as figuras 1 e 2 e veja que a tangente horizontal aos gráficos no ponto $x = c$ é uma reta paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Em seguida, explore a Figura 3, em que não se exige mais a condição $f(a) = f(b)$.

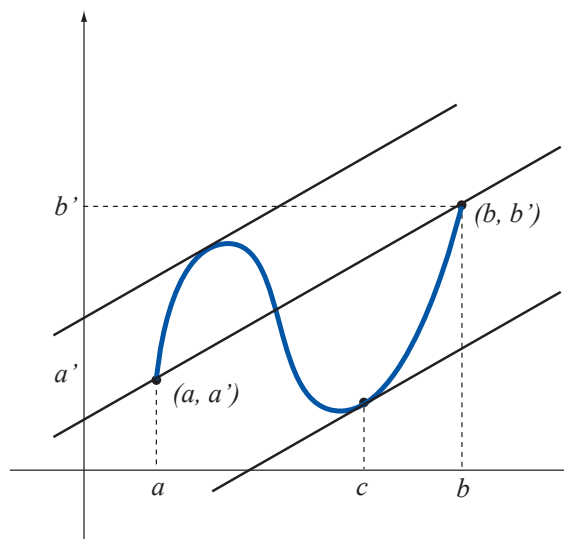



Figura 3 - O Teorema do Valor Médio

A intenção nos esboços da nova figura é a de sugerir que existe um ponto $x = c$ em (a,b) em que a tangente à curva é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; ou seja, em que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.[1] O enunciado do Teorema do Valor Médio sintetiza essa discussão.

3.1 Teorema do Valor Médio

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, diferenciável em (a,b). Então, existe pelo menos um número $x = c$ em (a,b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$; ou equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

3.1.1 Preparando a demonstração

Como demonstrar esse novo Teorema, usando o Teorema de Rolle?

Bem, primeiro, observe que a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ tem equação $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Podemos interpretar essa equação como uma função, expressa por

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

(Veja que a única coisa que foi feita foi dar o nome $g(x)$ a ela!)

Em seguida, verifique que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$.

[1] A inclinação m da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geometricamente isso fica evidente, se você se lembrar de que o gráfico da reta e o gráfico da função passam pelos mesmos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ no plano.

Desse modo, a função $h = f - g$ vale zero em $x = a$ e $x = b$, e se torna adequada para utilização do Teorema de Rolle.

Calcule o valor de $h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$ em $x = a$ e $x = b$ e verifique essa última afirmação! Podemos agora iniciar a demonstração.

Demonstração

Seja a função $h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$.

Uma vez que $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), $h(x)$ também é. (Você sabe o porquê?)

Além disso, $h(a) = h(b) = 0$. Isso quer dizer que a função $y = h(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

Calculando $h'(x)$, temos:

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right].$$

Calculando $h'(x)$ em $x = c$, obtemos

$h'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$. Como $h'(c) = 0$, podemos escrever

$$0 = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right].$$

Portanto, no ponto $c \in (a, b)$ em que $h'(c) = 0$, temos $f'(c) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$, como enuncia o Teorema.

3.2 Exemplo: funções polinomiais

A função $f(x) = x^3 + 2x - 1$, definida no intervalo $[1,3]$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio.

Isso porque a função f é polinomial e, portanto, é contínua e diferenciável em todo o seu domínio. Valem então as condições de continuidade em $[1,3]$ e a diferenciabilidade em $(1,3)$, como exige o Teorema.

O Teorema garante então que existe $c \in (1,3)$ tal que

$$f'(c) = \left[\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}\right].$$

Vamos determinar este valor c?

Calculando $f(3)$ e $f(1)$:

$$f(3) = 3^3 + 2.3 - 1 = 32$$

$$f(1) = 1 + 2.1 - 1 = 2.$$

Calculando $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2.$$

O valor procurado deve satisfazer:

$f'(x) = 3x^2 + 2 = \frac{32 - 2}{3 - 1} = 15.$ Ou seja, $x^2 = \frac{13}{3}$ e $x = +\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = +\frac{\sqrt{39}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{39}}{3}$.

Levando em conta o intervalo de definição em que estamos trabalhando, $c = +\frac{\sqrt{39}}{3}$.

Confira esta afirmação de que $\frac{\sqrt{39}}{3} \in (1,3)$.

3.3 Exemplo: explorando funções quadráticas

Seja $y = mx^2 + nx + p$ uma função quadrática, em que m, n e p são números reais genéricos, definida em um intervalo fechado $[a,b]$. É possível mostrarmos que existe apenas um único valor $x = c$ em (a,b) que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio, no caso dessa função; ou seja, tal que $y' = 2mx + n = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$. Faça um esboço do gráfico de uma função quadrática genérica, e confirme esse fato visualmente!

Argumentando algebricamente, observe que $y' = 2mx + n$ é uma equação de primeiro grau. Então, a equação $y' = 2mx + n = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$ terá uma única solução, que é:

$$x = \frac{y(b) - y(a)}{2m(b - a)} - \frac{n}{2m}.$$

Esse valor corresponde ao valor de $x = c$ procurado.

Falta mostrar que $c \in (a,b)$. Para isso, vamos escrever:

$y(b) = mb^2 + nb + p$

$y(a) = ma^2 + na + p$.

Desse modo,

$y(b) - y(a) = mb^2 + nb + p - (ma^2 + na + p) = (b-a)[m(b+a)+n]$.

E então $\dfrac{y(b)-y(a)}{2m(b-a)} - \dfrac{n}{2m} = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{n}{2m} - \dfrac{n}{2m} = \dfrac{b+a}{2}$.

Veja que esse valor é o ponto médio do intervalo $[a,b]$, correspondendo, portanto, a um ponto $c \in (a,b)$.

4. O TEOREMA DO VALOR MÉDIO SOB OUTRO OLHAR

O Teorema do Valor Médio pode ser interpretado de uma forma interessante, em termos de taxas de variação.[2]

Por exemplo, se $f(t)$ for interpretada como a posição de um corpo P em movimento numa linha reta, a velocidade média do corpo num intervalo de tempo $[a,b]$ será

$$v_m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

O Teorema do Valor Médio afirma que essa velocidade média será atingida em $f'(c)$, para algum tempo $c \in (a,b)$.

4.1 Exemplo: projetando radares

O velocímetro de um automóvel registra a velocidade de 50 km/h quando ele passa por um marco A ao longo de uma rodovia. Três minutos mais tarde, numa posição B, a cinco quilômetros da primeira posição, o velocímetro registra 55 km/h.

Podemos usar o Teorema do Valor Médio para mostrar que, em algum momento do percurso, o motorista ultrapassou o limite de velocidade naquela estrada, que é de 70 km/h. Veja só como fazemos isto:

Primeiro, consideramos o tempo decorrido t em horas após o carro ter passado pelo ponto A na estrada e f a função que descreve seu deslocamento.

Uma vez que três minutos corresponde a $\frac{3}{60}$ de uma hora, a velocidade média do carro entre os pontos A e B da rodovia foi

$v_m = \dfrac{f\left(\frac{3}{60}\right) - f(0)}{\frac{3}{60}} = 5 \times \dfrac{60}{3} = 100$ km/h. Isso quer dizer que, em

[2] Faça uma revisão das definições de taxa de variação média e instantânea.

algum momento do percurso, o carro atingiu a velocidade de *100 km/h* (garantido pelo Teorema do Valor Médio), ultrapassando, assim, o limite de velocidade na estrada.

Veja que de nada adianta a estratégia de reduzir a velocidade em pontos onde a velocidade seria registrada, se radares fossem colocados em dois marcos e o tempo de deslocamento entre eles fosse medido!

4.2 Exemplo: avaliando dietas

Seja $W(t)$ o peso de uma pessoa em função do tempo t, medida em meses. Então $\frac{dW}{dt}$ representa o ganho ou a perda de peso, em quilogramas por mês. O recorde de perda de peso registrado em dietas prescritas é uma redução de 220 kg para 60 kg, em oito meses. Podemos mostrar que a taxa de redução de peso excedeu 20 kg/mês, em algum tempo durante esse período!

Para isso, escrevemos a perda média de peso nos oito meses como

$$W_m = \frac{W(8) - W(0)}{8 - 0} = \frac{60 - 220}{8} = -20 \text{ kg/mês}$$

Assim, o Teorema do Valor Médio nos garante que, em algum momento da dieta, a taxa de perda de peso no mês foi de 20 kg/mês.

5. EXERCÍCIO

Você está dirigindo em uma estrada em linha reta, cujo limite de velocidade é de 90 km/h. Às 9:05 da noite, um guarda rodoviário registra a sua velocidade como 80 km/h. Três minutos depois, outro guarda, a cinco quilômetros na estrada, registra sua velocidade como 88km/h. Discuta se o DETRAN pode lhe multar por excesso de velocidade.

6. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo:* um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira. v. 1.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books, 1991.

AULA 20

Duas consequências do Teorema do Valor Médio

OBJETIVOS
Justificar teoricamente os testes da derivada primeira e da derivada segunda, que usamos no traçado de gráficos e problemas de otimização. Explorar relações entre funções que têm a mesma derivada.

1. INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos usar o Teorema do Valor Médio para justificar métodos já utilizados em aulas anteriores, ao traçarmos gráficos e resolvermos problemas de otimização. Muitos desses métodos são intuitivos e foram discutidos desse modo quando foram enunciados. Aqui, avançamos um pouco em direção à formalização desse conteúdo.

Como um segundo resultado do Teorema do Valor Médio, vamos estudar funções f e g que têm a mesma derivada, discutindo o significado dessa coincidência.

Os exercícios ao final desta aula referem-se principalmente a esse último resultado.

2. OS TESTES DA DERIVADA PRIMEIRA E DA DERIVADA SEGUNDA

Para provar os testes que utilizamos no traçado de gráficos e otimização, precisamos discutir as relações existentes entre o crescimento e o decrescimento da função e o sinal de sua derivada.

Se interpretamos a derivada de uma função $y = f(x)$ como taxa de variação, é razoável relacionarmos derivada positiva a crescimento e derivada negativa a decrescimento da função. Aqui, essa relação será estabelecida algebricamente por meio do Teorema do Valor Médio.

2.1 Proposição

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b).

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é crescente em $[a,b]$.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é decrescente em $[a,b]$.

(c) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante em $[a,b]$.

Demonstração

Para a parte (a) do Teorema, nossa hipótese é a de que $y = f(x)$ é uma função contínua em $[a,b]$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. A tese é: f é crescente em $[a,b]$.

Assim, dados quaisquer valores x_1 e x_2 em $[a,b]$, devemos mostrar que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

No intervalo $[x_1, x_2]$, as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas porque $[x_1, x_2]$ é um subintervalo de $[a,b]$. Então, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Do fato de $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ segue que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Uma vez que $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$ e $f(x_2) - f(x_1)$ também deverá ser positivo; ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$, como queríamos provar. A prova da parte (b) é similar.

Para a parte (c), nossa hipótese é a de que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ e desejamos mostrar que dela decorre que f é constante em $[a,b]$. Se isso não ocorresse, existiriam x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, de acordo com o Teorema do Valor Médio, $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$ para algum $c \in (x_1, x_2)$, o que seria uma contradição, pois $f'(x) = 0$, por hipótese.

Essa proposição estabelece o teste da derivada primeira, que é utilizado para classificar pontos de máximos e mínimos.

Explore a Figura 1 e veja essa classificação representada graficamente

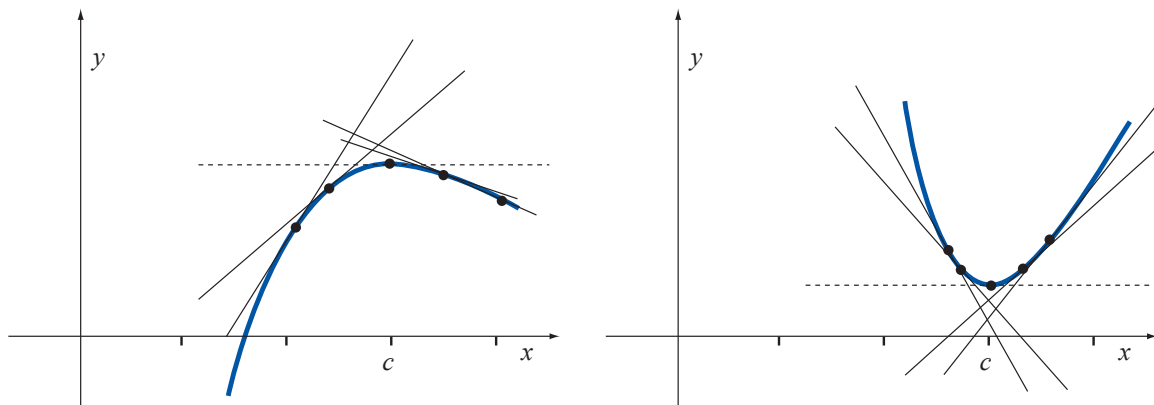



Figura 1 - O teste da derivada primeira

O teste da derivada primeira está enunciado em nossa Aula 13, como a seguir.

2.2 Teste da derivada primeira

Seja $x = c$ um número crítico de uma função f contínua em $c \in (a,b)$ e diferenciável em (a,b), exceto, talvez, no próprio $x = c$. Valem as seguintes afirmações:

- se $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, então o ponto $x = c$ é ponto de máximo local;
- se $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, então o ponto $x = c$ é ponto de mínimo local;
- se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo x em (a,b), exceto, talvez, no ponto $x = c$, então $x = c$ não é ponto nem de máximo nem de mínimo local.

Demonstração

Supor $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para $c < x < b$. Podemos escolher a e b de modo que a função f seja contínua em $[a,b]$. Logo, por 2.1, f é crescente em $[a,c]$ e decrescente em $[c,b]$. Assim, $f(x) < f(c)$ para todo $x \in [a,b]$. Isso quer dizer que o ponto $x = c$ é ponto de máximo local. A demonstração das outras duas afirmações são análogas.

Uma consequência do que discutimos refere-se à análise do crescimento

e decrescimento de $f'(x)$, que pode ser feita através do sinal de $f''(x)$. Vamos pensar assim para demonstrar o teste da derivada segunda, enunciado na Aula 14.

2.3 Teste da derivada segunda

Seja f diferenciável em um aberto contendo c, e $f'(c)=0$.

- se $f''(c)<0$, então f tem máximo local em c;
- se $f''(c)>0$, então f tem mínimo local em c;
- se $f''(c)=0$, nada se pode afirmar.

Demonstração

Se $f''(c)<0$, então $f'(x)$ é decrescente em algum intervalo (a,b) contendo c. Uma vez que $f'(c)=0$, então $f'(x)>0$ em (a,c) e $f'(x)<0$ em (c,b). Confirme a afirmação, na figura a seguir:

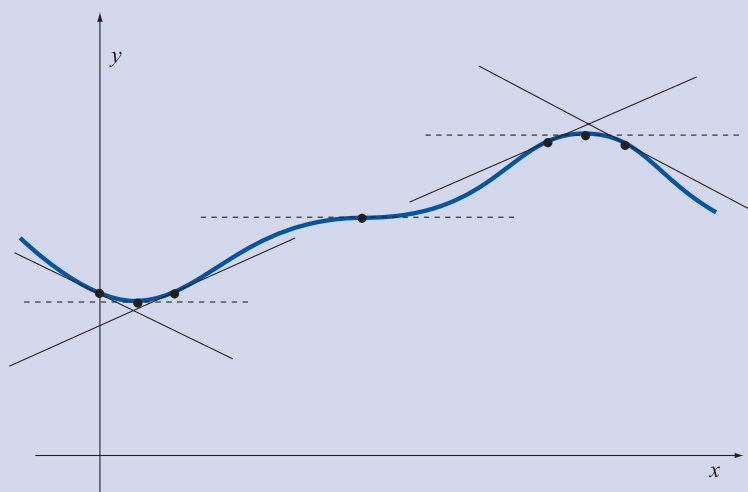



Figura 2 - O teste da derivada segunda

Pelo teste da derivada primeira, segue que f tem máximo local em c.

A segunda afirmativa é demonstrada do mesmo modo.

Para a terceira, explore as funções $f(x)=x^2$, $f(x)=-x^2$ e $f(x)=x^3$ em $x=0$. Todas elas satisfazem $f''(0)=0$ e $x=0$ é ponto de mínimo para a primeira função, de máximo para a segunda, e nem de máximo nem de mínimo para a terceira.

3. TEOREMA DA DIFERENÇA CONSTANTE

3.1 Proposição

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in(a,b)$. Então, f e g diferem por uma constante; ou seja, existe uma constante k tal que $f(x)-g(x)=k$ para todo $x\in[a,b]$.

Demonstração

Seja a função $h(x)=f(x)-g(x)$, definida em $[a,b]$. Para todo $x\in(a,b)$ temos $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$. Pelo item (c) do teorema anterior, h é constante em $[a,b]$. Isso quer dizer $h(x)=f(x)-g(x)=k$, ou seja, $f(x)-g(x)=k$.

O significado geométrico desse Teorema está representado na Figura 3, a seguir. Em síntese, o esboço na figura realça o fato de que, se duas funções f e g têm a mesma derivada, as retas tangentes a seu gráfico têm a mesma inclinação em cada ponto $x\in(a,b)$. Desse modo, seu gráfico tem a mesma forma: a equação $f(x)-g(x)=k$, que se reescreve $f(x)=g(x)+k$, vale, porque cada um dos gráficos pode ser obtido a partir do outro por meio de uma translação.

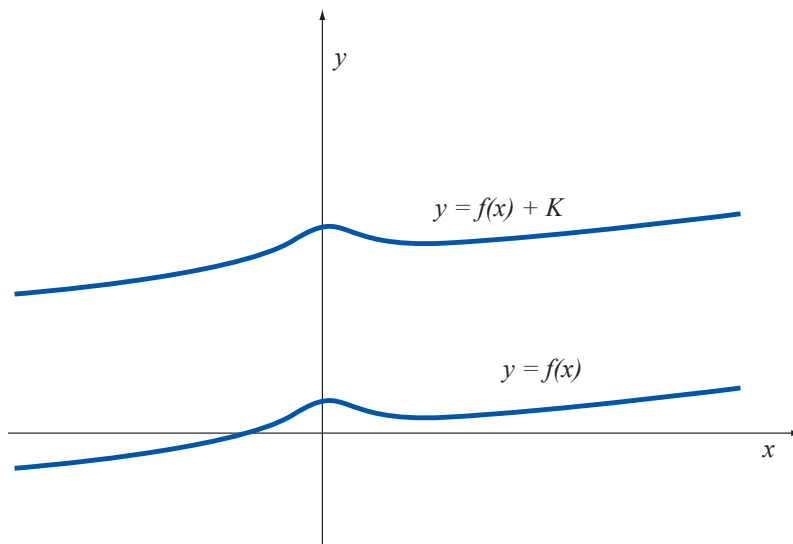



Figura 3 - Gráfico de $y=f(x)$ e de $y=f(x)+k$

3.2 Exemplo: identificando funções com derivada nula

Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x)=0$, para todo $x \in (a,b)$. Veja como o Teorema da Diferença Constante nos permite afirmar que $f(x)=k$, para algum número real k.

Primeiro, observamos que, tomando $g(x)=c$, onde c é uma constante qualquer, então $g'(x)=0$.

Assim, $f'(x)=g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Uma vez que f e g são contínuas em $[a,b]$, usamos o Teorema da Diferença Constante para afirmar que $f(x)-g(x)=k$ para todo $x \in [a,b]$.

Isso quer dizer que $f(x)-c=k$ para todo $x \in [a,b]$, ou seja,

$f(x)=c+k$, para todo $x \in [a,b]$.

Renomeando a constante genérica $c+k$ e escrevendo-a como k, chegamos a

$f(x)=k$, para todo $x \in [a,b]$.

Informalmente: se a derivada de uma função é zero em um intervalo, então a função é constante nesse intervalo.

3.3 Exemplo: identificando funções com derivada constante

Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x)=c$, para todo $x \in (a,b)$. O Teorema da Diferença Constante nos permite afirmar que $f(x)=cx+d$, para todo $x \in [a,b]$.

Vamos construir um argumento referenciado no Teorema para justificar essa afirmação?

Primeiro, observamos que para $g(x)=cx$, então $g'(x)=c$.

Assim, $f'(x)=g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Uma vez que f e g são contínuas em $[a,b]$, usamos o Teorema da Diferença Constante para afirmar que $f(x)-g(x)=k$ para todo $x \in [a,b]$. Renomeando essa constante k e escrevendo-a como d, chegamos a

$$f(x)-cx=d \text{, ou seja, } f(x)=cx+d.$$

Informalmente: se a derivada de uma função é constante em um intervalo, então a função é linear nesse mesmo intervalo.

4. EXERCÍCIOS

1. Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x) = \cos x$, para todo $x \in (a,b)$.

Mostre que $f(x) = \operatorname{sen} x + k$, para algum número real k.

2. Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x) = x$, para todo $x \in (a,b)$.

Mostre que $f(x) = \frac{x^2}{2} + k$, para algum número real k.

3. Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x) = x^2$, para todo $x \in (a,b)$.

Mostre que $f(x) = \frac{x^3}{3} + k$, para algum número real k.

4. Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x) = x^n$, para todo $x \in (a,b)$, e n um inteiro positivo. Mostre que $f(x) = \frac{x^n}{n} + k$, para algum número real k.

5. Seja f uma função contínua em $[a,b]$, e $f'(x) = e^x$, para todo $x \in (a,b)$.

Mostre que $f(x) = e^x + k$, para algum número real k.

5. REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000.

PINTO, M.; ARAÚJO, J.; FERREIRA, C. *Cálculo I.* Belo Horizonte: Editora UFMG, 2008. (Educação a Distância)

SIMMONS, G. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira. v. 1.

SWOKOWSKI, E.W. *Cálculo com geometria analítica*. Makron Books, 1991.